Exercice 3

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in]0,\pi], f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

1) Montrer que f est prolongeable sur $[0,\pi]$ en une fonction de classe C^1, que l'on notera aussi f.

2) Soit n un entier naturel. On considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt$$

Calculer I_0.

Comparer I_{n+1} et I_n.

En déduire I_n en fonction de l'entier n.

3) Montrer que si φ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$, alors, la suite J_n définie par :

$$J_n = \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\, dt$$

admet pour limite 0 quand l'entier n tend vers $+\infty$.

4) Justifier alors l'existence et le calcul de l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

<u>Exercice 3</u> :

1) Cherchons un équivalent de f au voisinage de 0 :

$$\forall\, x \in\ ]0,\pi]\ : f(x) = \frac{2\,sin\left(\frac{x}{2}\right) - x}{2\,x\,sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3)\right) - x}{2\,x\,sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{24}\,x^3 + o(x^3)}{2\,x\,sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Soit :

$$f(x) \sim \frac{-\frac{1}{24}\,x^3}{2\,x\,\frac{x}{2}} = -\frac{1}{24}\,x$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

f est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Montrons que le prolongement est dérivable.

f est dérivable sur $]0,\pi]$ par inverse puis différence. Reste à étudier la dérivabilité en 0 en étudiant le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} \sim = -\frac{1}{24}$$

Donc f est dérivable en 0 et :

$$\boxed{f'(0) = -\frac{1}{24}}$$

Montrons que f' est dérivable en 0. On

$$\forall\, x \in\ ]0,\pi] :\ f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\,\frac{\left(-\frac{1}{2}\,cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{cos\left(\frac{x}{2}\right)}{4\,sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{-4\,sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + x^2\,cos\left(\frac{x}{2}\right)}{4\,x^2\,sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{-4\,\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)\right)^2 + x^2\,\left(1 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)}{4\,x^2\,sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{-4\,\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{48} + o(x^4)\right) + x^2 - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}{4\,x^2\,sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{x^4}{24} + o(x^4)}{4\,x^2\,sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \sim \frac{-\frac{x^4}{24}}{4\,x^2\,\frac{x^2}{4}} = -\frac{1}{24}$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{24} = f'(0)}$$

f' est donc continue en 0 et f de classe C_1 sur $[0, \pi]$

2) On a :

$$I_0 = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

Rappelons l'identité trigonométrique :

$$sin(a) - sin(b) = 2\, cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\, sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \frac{sin\left(\left(n+1+\frac{1}{2}\right)\, t\right) - sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right)}{2\, sin\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{2\, cos\left((2\, n+2)\, \frac{t}{2}\right)\, sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\, sin\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} cos\big((n+1)\, t\big)\, dt = \left[\frac{sin\big((n+1)\, t\big)}{n+1}\right]_0^{\pi} = 0$$

D'où :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} :\ I_n = I_0 = \frac{\pi}{2}}$$

3) Faisons une intégration par partie en posant :

$$u(t) = \varphi(t),\ \ v'(t) = sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right)$$

$$u'(t) = \varphi'(t),\ \ v(t) = -\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\, cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right)$$

Alors :

$$\int_0^{\pi} \varphi(t)\, sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right)\, dt$$

$$= \left[-\frac{\varphi(t)}{n+\frac{1}{2}}\, cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} \varphi'(t)\, cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right)\, dt$$

$$= \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} \varphi'(t) \, cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right) t\right) \, dt$$

Or φ' étant continue :

$$\exists \, K \in]0,+\infty[\, : \, \forall \, t \in [0,\pi] \, : \, |\varphi'(t)| \, \leq K$$

Ainsi :

$$\left| \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} \varphi'(t) \, cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right) t\right) \, dt \right| \leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} \left| \varphi'(t) \, cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right) t\right) \right| \, dt$$

$$\leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} K \, dt \leq \frac{K \, \pi}{n+\frac{1}{2}}$$

Par comparaison, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \, sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right) t\right) \, dt = 0$$

4) Commençons par établir l'existence de l'intégrale impropre :

En $+\infty$, on a par intégration par partie :

$$\int_1^X \frac{sin(t)}{t} \, dt = \left[-\frac{1}{t} cos(t)\right]_1^X - \int_1^X \frac{cos(t)}{t^2} \, dt$$

$$= cos(1) - \frac{1}{X} cos(X) + \int_1^X \frac{cos(t)}{t^2} \, dt$$

Or :

$$\left|\frac{cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$

Donc $\int_1^X \frac{cos(t)}{t^2} \, dt$ est absolument convergente. De plus $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} cos(X) = 0$ donc $\int_1^X \frac{sin(t)}{t} \, dt$ est convergente.

En 0 il suffit de noter que $\frac{sin(t)}{t} \sim 1$

Pour déterminer la valeur de l'intégrale, appliquons le résultat du 3) avec $\varphi(t) = f(t)$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2\,sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\,sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\,t\right)\,dt=0$$

D’où on tire :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\,t\right)}{t}\,dt=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\,t\right)}{2\,sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt=I_n=\frac{\pi}{2}$$

Faisons alors pour la première intégrale, le changement de variable :

$$x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\,t,\qquad dx=\left(n+\frac{1}{2}\right)\,dt$$

$$\int_0^{\pi}\frac{sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\,t\right)}{t}\,dt=\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{sin(x)}{\frac{x}{n+\frac{1}{2}}}\,\frac{dx}{n+\frac{1}{2}}=\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{sin(x)}{x}\,dx$$

Par passage à la limite, on en déduit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{sin(x)}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}}$$