Exercice 2

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
A toute fonction f de E, on associe la fonction F définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt$$

1) Montrer que F a une limite ℓ en 0, èt préciser cette limite en fonction de f.

On pose $F(0) = \ell$.

On obtient ainsi une fonction F définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer que l'application φ définie par :

$$\forall f \in E, \varphi(f) = F$$

est un endomorphisme de E.

3) Soit λ un réel quelconque.

Déterminer les fonctions f_λ de E, différentes de la fonction nulle, telles que

$$\varphi(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$$

4) On suppose que la fonction f a une limite finie s en $+\infty$.

Montrer que la fonction F a également une limite finie, que l'on précisera, en $+\infty$.

Montrer que la réciproque est fausse : exhiber une fonction f qui n'a pas de limite finie en $+\infty$, telle que la fonction F associée ait une limite finie en $+\infty$.

Corrigé

On désignera par $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$

1) Posons :

$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

f étant continue sur $\mathbb{R}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = f$. On a de plus :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* :\quad F(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(0) = f(0)$$

2) Commençons par nous assurer que φ a bien ses valeurs dans $\mathbb{E}$.

   Soit $f \in \mathbb{E}$ alors $\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (quotient de deux fonctions continues, g et la fonction $x \to x$. Par construction $\varphi(f)$ est continue en 0, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\varphi(f) \in \mathbb{E}$

   Soit $(f, g, \alpha) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$ alors on a d'une part :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* : \quad \varphi(f + \alpha\, g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \big(f(t) + \alpha\, g(t)\big)\, dt = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt + \alpha \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\, dt$$

$$= \varphi(f)(x) + \alpha\, \varphi(g)(x)$$

   et d'autre part :

$$\varphi(f + \alpha\, g)(0) = f(0) + \alpha\, g(0) = \varphi(f)(0) + \alpha\, \varphi(g)(0)$$

   Donc :

$$\varphi(f + \alpha\, g) = \varphi(f) + \alpha\, \varphi(g)$$

   D'où φ linéaire donc endomorphisme de $\mathbb{E}$

3) Soit $f_\lambda \in \mathbb{E}^*$ telle que : $\varphi(f_\lambda) = \lambda\, f_\lambda$ alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* : \quad \int_0^x f_\lambda(t)\, dt = \lambda\, x\, f_\lambda(x)$$

Soit en dérivant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* : \quad f_\lambda(x) = \lambda\left(f_\lambda(x) + x\, f'_\lambda(x)\right)$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* : \lambda\, x\, f'_\lambda(x) = (1 - \lambda)\, f_\lambda(x)$$

Distinguons plusieurs cas :

<u>1er cas : $\lambda = 0$</u> : On a alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* : \quad f_\lambda(x) = 0$$

Et par continuité en 0 : $f_\lambda = 0$

Ce qui est absurde

<u>2ème cas : $\lambda = 1$</u> On a alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* :\ \ f'_\lambda(x) = 0$$

Donc f_λ est constante sur $\mathbb{R}^*$ et par continuité constante sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, si f est une constante non nulle C sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* :\ \varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x C\, dt = C$$

Et :

$$\varphi(f)(0) = C$$

Donc :

$$\varphi(f) = 1\, f$$

1 est alors une valeur propre de φ et le sous espace propre associé est engendré par la fonction constante égale à 1.

<u>3ème cas</u> : $\lambda \neq 0\ et\ \lambda \neq 1$: On a alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* :\ \ f'_\lambda(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda}\ \frac{1}{x}\ f_\lambda(x)$$

Ainsi :

$$\exists\, C_1 \in \mathbb{R} :\ \forall\, x \in\,]0,+\infty[\ :\ f_\lambda(x) = C_1\, e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} Ln(x)}$$

$$\exists\, C_2 \in \mathbb{R} :\ \forall\, x \in\,]-\infty,0[\ :\ f_\lambda(x) = C_2\, e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} Ln(-x)}$$

Supposons par l'absurde : $\lambda \in\,]-\infty,0[\, \cup\,]1,+\infty[$ alors :

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} < 0$$

Et si $C_1 \neq 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f_\lambda(x) = +\infty$$

Si $C_2 \neq 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f_\lambda(x) = +\infty$$

Ce qui est absurde, donc : $C_1 = 0, C_2 = 0$ et finalement : f_λ est la fonction nulle ce qui est absurde.

Donc : $\lambda \in\ ]0,1[$ et :

$$\forall\, x \in\,]0,+\infty[\ :\ f_\lambda(x) = C_1\, x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

$$\forall\, x \in\,]-\infty,0[\ :\ f_\lambda(x) = C_2\, (-x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

$$f_\lambda(0) = 0 \; (par\ continuité)$$

Réciproquement : considérons une fonction f_λ de la forme précédente. Alors :

$$\forall\, x \in\,]0,+\infty[\, :\; \varphi(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x C_1\, t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\, dt = \frac{C_1}{x}\left[\frac{t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}+1}}{\frac{1-\lambda}{\lambda}+1}\right]_0^x = \lambda\, \frac{C_1}{x}\, x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}+1} = \lambda\, f_\lambda(x)$$

$$\forall\, x \in\,]-\infty,0[\, :\; \varphi(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x C_2\, (-t)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\, dt = \frac{C_2}{x}\left[\frac{t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}+1}}{\frac{1-\lambda}{\lambda}+1}\right]_0^x = \lambda\, \frac{C_1}{x}\, x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}+1}$$

$$= \lambda\, f_\lambda(x)$$

En conclusion, les valeurs propres de φ sont les réels de l'intervalle $]0,1]$ et les fonctions propres associées telles que définies précédemment

4) Soit $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists\, x_0 \in\,]0,+\infty[\, :\; \forall\, x \in \mathbb{R} :\; x \geq x_0 \Rightarrow\; s - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < s + \frac{\varepsilon}{2}$$

Or :

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^{x_0} f(t)\, dt + \int_{x_0}^x f(t)\, dt$$

Ainsi :

$$x \geq x_0 \Rightarrow \int_{x_0}^x \left(s - \frac{\varepsilon}{2}\right) dt < \int_{x_0}^x f(t)\, dt < \int_{x_0}^x \left(s + \frac{\varepsilon}{2}\right) dt$$

$$\Rightarrow \left(s - \frac{\varepsilon}{2}\right) (x - x_0) < \int_{x_0}^x f(t)\, dt < \left(s + \frac{\varepsilon}{2}\right) (x - x_0)$$

D'où :

$$x \geq x_0 \Rightarrow \left(s - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{x - x_0}{x} + \frac{1}{x}\int_0^{x_0} f(t)\, dt < F(x) < \left(s + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{x - x_0}{x} + \frac{1}{x}\int_0^{x_0} f(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \left(s - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{1}{x}\int_0^{x_0} f(t)\, dt < F(x) < \left(s + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{1}{x}\int_0^{x_0} f(t)\, dt$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_{0}^{x_0} f(t)\,dt = 0$$

Donc :

$$\exists\, x_1 \in \,]x_0, +\infty[\, :\ \forall\, x \in \mathbb{R} :\ x > x_1 \Rightarrow\ -\frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{x}\int_{0}^{x_0} f(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi :

$$x > x_1 \Rightarrow s - \frac{\varepsilon}{2} < F(x) < s + \frac{\varepsilon}{2}$$

D’où finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = s}$$

La réciproque est fausse. Il suffit de prendre : $f(t) = sin(t)$. Cette fonction n’a pas de limite en $+\infty$ mais :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_{0}^{x} sin(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}(1 - cos(x)) = 0$$