Exercice 3

1) Justifier l'existence de la fonction f d'une variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\, dt$$

2) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que :

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Exercice 4

Il s'agit de déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en 0 et telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x) \quad (1)$$

1) Soit f une application vérifiant (1). Déterminer $f(0)$.

2) Montrer que l'ensemble des applications qui vérifient (1) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3) Montrer que si la fonction f vérifie (1), elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et elle vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on déterminera.

4) En déduire toutes les solutions du problème.

<u>Corrigé</u>

1) On a en 0 :

$$\frac{sin(x\,t)}{e^t - 1} \sim \frac{x\,t}{t} \sim x$$

Donc l'intégrale converge en 0.

En $+\infty$:

$$\left|\frac{sin(x\,t)}{e^t - 1}\right| \leq \frac{1}{e^t - 1} \sim e^{-t}$$

Or l'intégrale de e^{-t} est convergente en $+\infty$ donc l'intégrale de la fonction étudiée est absolument convergente.

2) Introduisons la suite de fonctions :

$$f_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{sin(x\,t)}{e^t - 1}\, dt$$

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction de deux variables sous l'intégrale est continue et admet une dérivée partielle continue par rapport au couple de variables (x,t) sur le domaine $\mathbb{R} \times \left[\frac{1}{n}, n\right]$. De plus :

$$f_n{}'(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{t\, cos(x\, t)}{e^t - 1}\, dt$$

Posons pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\, cos(x\, t)}{e^t - 1}\, dt$$

g est bien définie car en 0 :

$$\frac{t\, cos(x\, t)}{e^t - 1} \sim 1$$

Et en $+\infty$:

$$\left|\frac{t\, cos(x\, t)}{e^t - 1}\right| \leq \frac{t}{e^t - 1} \sim t\, e^{-t}$$

De plus :

$$|f_n'(x) - g(x)| = \left|\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{t\, cos(x\, t)}{e^t - 1}\, dt + \int_n^{+\infty} \frac{t\, cos(x\, t)}{e^t - 1}\, dt\right| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{t}{e^t - 1}\, dt + \int_n^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt$$

La quantité majorante tendant vers 0 indépendamment de x la suite f_n' tend vers g uniformément sur $\mathbb{R}$. Comme $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x)$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad f'(x) = g(x)$$

De plus f_n' étant continue sur $\mathbb{R}$, sa limite uniforme f' est continue sur $\mathbb{R}$ et donc f est de classe C_1 sur $\mathbb{R}$

3) On a :

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{e^t - 1}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\, sin(t)}{1 - e^{-t}}\, dt$$

Or :

$$\frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = e^{-t} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\, t} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(k+1\,)t} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n\, t}$$

Donc :

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right)\, dt$$

Justifions l'interversion du signe somme et du signe intégral en considérant :

$$\left| \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right)\, dt - \sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right) dt \right|$$

$$= \left| \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right)\, dt - \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right)\, dt \right|$$

$$= \left| \int_0^{+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right)\, dt \right|$$

$$= \left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(N+1)\,t}\, sin(t)}{1 - e^{-t}} dt \right|$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{sin(t)}{1 - e^{-t}} \right| e^{-(N+1)\,t}\, dt$$

Or , la fonction sous valeur absolue dans l'intégrale est bornée sur $[0, +\infty[$ et donc :

$$\exists\, M \in]0, +\infty[: \forall\, t \in [0, +\infty[: \left| \frac{sin(t)}{1 - e^{-t}} \right| \leq M$$

Ainsi :

$$\left| \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right)\, dt - \sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right) dt \right| \leq M \int_0^{+\infty} e^{-(N+1)\,t}\, dt = \frac{M}{N+1}$$

On en déduit par comparaison

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right)\, dt$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right) dt$$

$$= Im\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, e^{i\,t}\right) dt \right]$$

$$= Im\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{(-n+i)\,t}\, dt \right]$$

$$= Im\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{e^{(-n+i)\,t}}{-n+i}\right]_0^{+\infty}\right]$$

$$= Im\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n-i}\right]$$

$$= Im\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+i}{n^2+1}\right]$$

Ainsi :

$$\boxed{f(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}}$$