Exercice 2

On considère la suite (a_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$$

1) Calculer a_0 et a_1.

2) Montrer que la suite (a_n) est convergente et trouver sa limite.

3) Montrer que la série de terme général a_n est divergente.

4) On considère la série entière de la variable réelle x de terme général u_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = a_n x^n$$

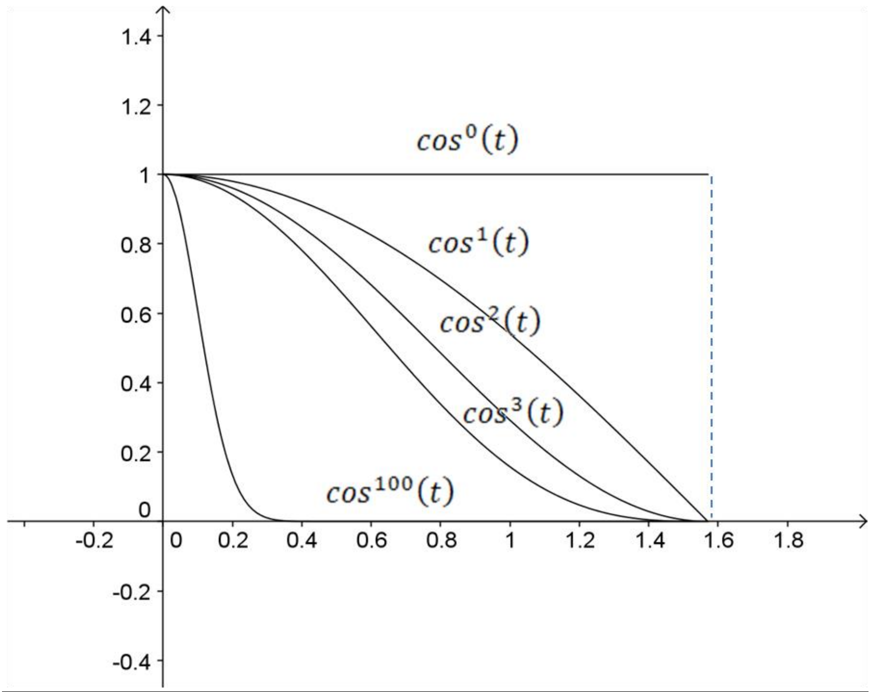
a) Déterminer son rayon de convergence.
b) Déterminer l'ensemble D des réels x tels que la série de terme général $u_n(x)$ soit convergente.

5) On définit alors la fonction somme U de la série entière précédente par :

$$\forall x \in D, U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Déterminer une expression de $U(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.
On déterminera en particulier la valeur de $U(-1)$.

Corrigé



1) On a :

$$a_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^0(t)\, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^1(t)\, dt = [sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

2) Montrons que la suite est décroissante et minorée. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : cos^n(t) \geq 0$$

Donc :

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)\, dt \geq 0$$

La suite (a_n) est donc minorée par 0.

De plus :

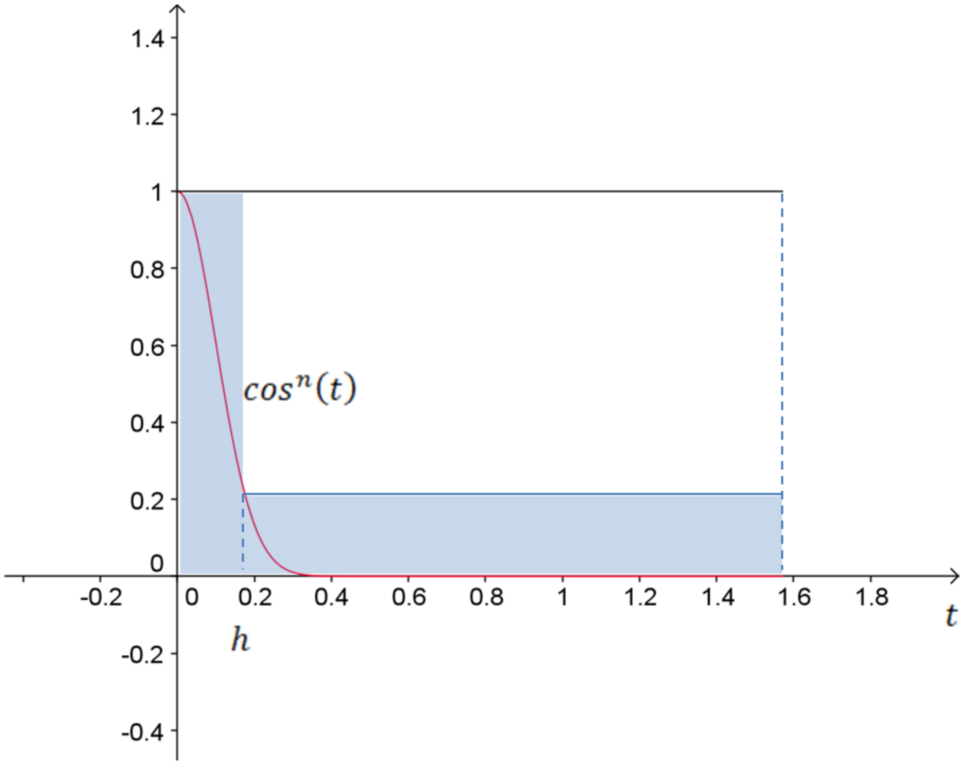
$$\forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : cos^{n+1}(t) - cos^n(t) = cos^n(t)\,(cos(t) - 1) \leq 0$$

Donc :

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cos^{n+1}(t) - cos^n(t)\right) dt \leq 0$$

La suite (a_n) est donc décroissante. On en déduit qu'elle est convergente.

Pour déterminer sa limite, procédons à une majoration de l'intégrale comme illustré sur la figure :



Soit $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors :

$$a_n = \int_0^h cos^n(t)\, dt + \int_h^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)\, dt$$

Donc :

$$0 \leq a_n \leq \int_0^h 1\, dt + \int_h^{\frac{\pi}{2}} cos^n(h)\, dt$$

Soit :

$$0 \leq a_n \leq h + \left(\frac{\pi}{2} - h\right)\, cos^n(h)$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ posons :

$$h = min\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

alors , puisque $0 < cos^n(h) < 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - h\right)\, cos^n(h) = 0$$

Donc :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \ \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - h\right)\, cos^n(h) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \ 0 \leq a_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 0}$$

3) Comme précédemment, soit $N \in \mathbb{N}$, $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \geq \sum_{n=0}^{N} \int_h^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)\, dt = \int_h^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{N} cos^n(t)\ dt = \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - cos^{N+1}(t)}{1 - cos(t)}\ dt$$

Finalement :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \geq \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - cos(t)}\ dt - \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^{N+1}(t)}{1 - cos(t)}\ dt \qquad (1)$$

Or :

$$0 \leq \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^{N+1}(t)}{1 - cos(t)}\ dt \leq cos^{N+1}(h) \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - cos(t)}\ dt$$

Et puisque $0 < cos^{N+1}(h) < 1$:

$$\lim_{N \to +\infty} cos^{N+1}(h) \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - cos(t)}\ dt = 0$$

Donc par théorème des gendarmes :

$$\lim_{N \to +\infty} \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^{N+1}(t)}{1 - cos(t)}\ dt = 0$$

Or la suite $\sum_{n=0}^{N} a_n$ strictement croissante est soit convergente soit divergente vers $+\infty$. Supposons qu'elle converge vers une limite finie L. En passant à la limite dans l'inégalité (1) on aurait :

$$L \geq \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - cos(t)}\ dt$$

Or on a en 0 :

$$\frac{1}{1 - cos(t)} \sim \frac{2}{t^2}$$

On en déduit :

$$\lim_{h \to 0^+} \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - cos(t)}\ dt = +\infty$$

Ceci est absurde. Donc :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n = +\infty}$$

4)

a) Soit R le rayon de convergence de la série entière de terme général a_n. Du 3) on déduit :

$$R \leq 1$$

Soit alors $x \in [0,1[$ alors :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{N}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(x\,cos(t)\big)^n\,dt =$$

Posons :

$$b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(x\,cos(t)\big)^n\,dt$$

Alors :

$$|b_n| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}}|x|^n\,dt = \frac{\pi}{2}|x|^n$$

La série $\sum b_n$ est donc par comparaison absolument convergente. Ainsi :

$$\boxed{R = 1}$$

b) Notons $\mathcal{D}$ le domaine de convergence de $\sum a_n\ x^n$. On a vu :

$$]-1,1[\ \subset \mathcal{D}$$

Et en 1 la série diverge. Reste à étudier en -1. $\sum a_n\ (-1)^n$ est une série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant. Le théorème d'Abel montre qu'elle est convergente. Ainsi :

$$\mathcal{D} = [-1,1[$$

5) On a pour $x \in \mathcal{D}$:

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k = \sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(x\,cos(t)\big)^k\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=0}^{n}\big(x\,cos(t)\big)^k\ dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\big(x\,cos(t)\big)^{n+1}}{1-x\,cos(t)}\ dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-x\,cos(t)}\ dt - x^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\big(cos(t)\big)^{n+1}}{1-x\,cos(t)}\ dt$$

Or :

$$\forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : 0 \leq \frac{1}{1 - x\, cos(t)} \leq \frac{1}{1 - x}$$

Donc :

$$\left| x^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(cos(t)\right)^{n+1}}{1 - x\, cos(t)}\, dt \right| \leq |x|^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(cos(t)\right)^{n+1}}{1 - x\, cos(t)}\, dt \leq \frac{1}{1 - x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cos(t)\right)^{n+1}\, dt$$

Et :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 - x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cos(t)\right)^{n+1}\, dt = 0$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} x^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(cos(t)\right)^{n+1}}{1 - x\, cos(t)}\, dt = 0$$

Ainsi :

$$U(x) = \lim_{n \to +\infty} U_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x\, cos(t)}\, dt$$

Reste à calculer l’intégrale en faisant le changement de variable :

$$u = tan\left(\frac{t}{2}\right), du = \frac{1 + u^2}{2}\, dt$$

Sachant :

$$cos(t) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

Il vient :

$$U(x) = \int_0^1 \frac{2\, du}{(1 + u^2)\left(1 - x\, \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right)}$$

$$= \int_0^1 \frac{2\, du}{1 - x + (1 + x)\, u^2}$$

$$= \frac{2}{1 - x} \int_0^1 \frac{du}{\frac{1 - x}{1 + x} + u^2}$$

$$= \frac{2}{1 - x} \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \left[tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\, u \right) \right]_0^1$$

finalement

$$U(x) = \frac{2}{1-x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

En particulier :

$$U(-1) = 0$$