Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$, et l'application Φ qui à tout polynôme P de E associe le polynôme $Q = \Phi(P)$ défini par :

$$Q(X) = (X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X)$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P.

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

2) Donner la matrice de Φ par rapport à la base canonique $\mathcal{B}$ de E, soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$.

3) Montrer que $(X-1)^4$ est un vecteur propre de Φ et préciser la valeur propre associée.

4) Montrer que si P est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = P(-X)$$

est vecteur propre de Φ associé à une valeur propre dont on donnera l'expression en fonction de λ.
En déduire alors un deuxième vecteur propre de ϕ, et la valeur propre associée.

5) Déterminer les valeurs propres de Φ, et les vecteurs propres associés. Pour cela, on cherchera les scalaires λ tels qu'il existe un polynôme P non nul tel que $\Phi(P) = \lambda P$, et on se ramènera à une équation différentielle.
On choisira ensuite la valeur de λ de sorte que l'équation différentielle ait une solution polynômiale non nulle.

<u>Exercice 1 :</u>

1)

Soit $P \in \mathbb{E}$ posons : $P(X) = a_4\, X^4 + R(X)$ où : $R(X) \in \mathbb{R}_3[X]$ alors :

$$\Phi(P) = (X^2 - 1)\left(4\, a_4\, X^3 + R'(X)\right) - (4\,X + 1)\left(a_4\, X^4 + R(X)\right)$$
$$= X^2\, R'(X) - 4\, a_4\, X^3 - R'(X) - a_4\, X^4 - 4\, X\, R(X) - R(X)$$

$\Phi(P)$ est donc une somme de polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ donc $\Phi(P) \in \mathbb{E}$

Soit $(P_1, P_2, \alpha) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$ alors :

$$\Phi(P_1 + \alpha\, P_2) = (X^2 - 1)\left(P_1(X) + \alpha\, P_2(X)\right)' - (4\,X + 1)\left(P_1(X) + \alpha\, P_2(X)\right)$$
$$= (X^2 - 1)\, P_1'(X) - (4\,X + 1)P_1(X) + \alpha\left((X^2 - 1)\, P_2'(X) - (4\,X + 1)P_2(X)\right)$$
$$\Phi(P_1) + \alpha\, \Phi(P_2)$$

Donc Φest un endomorphisme de $\mathbb{E}$

2) On a :

$$\Phi(1) = -(4\,X + 1) = -1 - 4\,X$$

$$\Phi(X) = (X^2 - 1) - (4\,X + 1)\,X = -1 - X - 3\,X^2$$

$$\Phi(X^2) = (X^2 - 1)(2\,X) - (4\,X + 1)\,X^2 = -2\,X - \,X^2 - 2\,X^3$$

$$\Phi(X^3) = (X^2 - 1)(3\,X^2) - (4\,X + 1)\,X^3 = -3\,X^2 - \,X^3 - \,X^4$$

$$\Phi(X^4) = (X^2 - 1)(4\,X^3) - (4\,X + 1)\,X^4 = -4\,X^3 - \,X^4$$

On en déduit :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3) On a :

$$\Phi((X-1)^4) = (X^2 - 1)\,(4\,(X-1)^3) - (4\,X + 1)\,(X-1)^4$$

$$= 4\,(X+1)\,(X-1)^4 - (4\,X + 1)\,(X-1)^4$$

$$= \,(X-1)^4\,\big(4\,(X+1) - (4\,X + 1)\big) = 3\,(X-1)^4$$

Donc $(X-1)^4$ est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre 3

4) Soit P vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ alors :

$$\Phi(P) = \lambda\,P$$

$$(X^2 - 1)\,P'(X) - (4\,X + 1)\,P(X) = \lambda\,P(X)$$

D'où :

$$((-X)^2 - 1)\,P'(-X) - (4\,(-X) + 1)\,P(-X) = \lambda\,P(-X)$$

Posons : $Q(X) = P(-X)$ alors :

$$Q'(X) = -P'(-X)$$

Et :

$$(X^2 - 1)\big(-Q'(X)\big) - (-4\,X + 1)Q(X) = \lambda\,Q(X)$$

Soit :

$$(X^2 - 1)Q'(X) - (4\,X - 1)Q(X) = -\lambda\,Q(X)$$

Finalement :

$$(X^2 - 1)Q'(X) - (4\,X + 1)Q(X) = (-\lambda - 2)\,Q(X)$$

Donc :

$$\Phi(Q) = (-\lambda - 2)\,Q$$

Q est donc vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $(-\lambda - 2)$

Ainsi $(-X-1)^4 = (X+1)^4$ est vecteur propre de Φ associé à la valeur propre -5

5) On a pour $P \in \mathbb{E}$:

$$\Phi(P) = \lambda\, P \Leftrightarrow (X^2-1)\, P'(X) - (4\,X+1)\, P(X) = \lambda\, P(X)$$

$$\Leftrightarrow (X^2-1)\, P'(X) - (4\,X+1+\lambda)\, P(X) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x \in \,]1, +\infty[\, : \; (x^2-1)\, P'(x) - (4\,x+1+\lambda)\, P(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x \in \,]1, +\infty[\, : \; P'(x) - \frac{4\,x+1+\lambda}{x^2-1}\, P(x) = 0$$

Or, une décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{4\,x+1+\lambda}{x^2-1} = \frac{4\,x+1+\lambda}{(x-1)\,(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

Avec :

$$a = \frac{5+\lambda}{2}, \qquad b = \frac{-\lambda+3}{2}$$

Ainsi :

$$\Phi(P) = \lambda\, P \Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : \forall\, x \in \,]1, +\infty[\, : \; P(x) = c\, e^{\frac{5+\lambda}{2} Ln(x-1) + \frac{-\lambda+3}{2} Ln(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : \forall\, x \in \,]1, +\infty[\, : \; P(x) = c\, (x-1)^{\frac{5+\lambda}{2}}\, (x+1)^{\frac{-\lambda+3}{2}}$$

Sachant que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 4, il faut rajouter les conditions :

$$\begin{cases} \dfrac{5+\lambda}{2} = p \in \mathbb{N} \\ \dfrac{-\lambda+3}{2} \in \mathbb{N} \\ \dfrac{5+\lambda}{2} + \dfrac{-\lambda+3}{2} \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -5 + 2\,p \in \mathbb{N} \\ 4 - p \in \mathbb{N} \\ p + 4 - p \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -5 + 2\,p \\ p \in [\![0 ; 4]\!] \end{cases}$$

Nous en déduisons que Φ possède 5 valeurs propres distinctes : $-5, -3, -1, 1, 3$ et chaque sous espace propre associé est de dimension 1 :

$$\mathbb{E}_{-5} = Vect[(X+1)^4]$$

$$\mathbb{E}_{-3} = Vect[(X-1)\,(X+1)]$$

$$\mathbb{E}_{-1} = Vect[(X-1)^2\,(X+1)^2]$$

$$\mathbb{E}_{1} = Vect[(X-1)^3\,(X+1)]$$

$$\mathbb{E}_{3} = Vect[(X-1)^4]$$

Φ est en particulier diagonalisable