Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ ainsi :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

1) Montrer que $f(x,y)$ tend vers $+\infty$ quand la norme du vecteur (x,y) tend vers $+\infty$ (indépendamment du choix de la norme).
2) En déduire que la fonction f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, déterminer la valeur m de ce minimum, et déterminer les points où la valeur m est atteinte.
3) On considère le domaine D ainsi défini :

$$D = [-1,1]^2$$

On définit la restriction g de f à D :

$$\forall (x,y) \in D, g(x,y) = f(x,y)$$

Déterminer le maximum et le minimum de la fonction g sur D, et préciser les points pour lesquels ils sont atteints.

Corrigé

1) Posons :

$$\begin{cases} x = r\,cos(\theta) \\ y = r\,sin(\theta) \end{cases}$$

Alors :

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2\,x^2y^2 - 4\,x\,y$$

$$= r^4 - 2\,r^4\,cos^2(\theta)\,sin^2(\theta) - 4\,r^2 cos(\theta)\,sin(\theta)$$

$$= r^4\,\left(1 - \frac{1}{2} sin^2(2\,\theta)\right) - 2\,r^2\,sin(2\,\theta)$$

Or :

$$\frac{1}{2}\,sin^2(2\,\theta) \leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\,sin^2(2\,\theta) \geq -\frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} sin^2(2\,\theta) \geq \frac{1}{2}$$

$$r^4\,\left(1 - \frac{1}{2} sin^2(2\,\theta)\right) \geq \frac{1}{2}\,r^4$$

Et :

$$2\,r^2\,sin(2\,\theta) \leq 2\,r^2$$

$$-2\,r^2\,sin(2\,\theta) \geq -2\,r^2$$

Donc :

$$f(x,y) \geq \frac{1}{2}\,r^4 - 2\,r^2$$

D'autre part :

$$r = \|(x,y)\|_2$$

On en déduit par comparaison :

$$\lim_{\|(x,y)\|_2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$$

2) On note que $f(0,0) = 0$. Or pour $A = 1 :\ \exists\, R > 0 : \|(x,y)\|_2 > R \Rightarrow\ f(x,y) > 1$

Soit D la boule fermée pour la norme précédente de centre $(0,0)$ et de rayon R. D est un compact de $\mathbb{R}^2$ et f est continue sur D. Donc f admet un minimum sur D qu'elle atteinten au moins un point (x_0, y_0). Or $(0,0) \in D$ donc :

$$f(x_0, y_0) \leq f(0,0) = 0$$

De plus :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash D : f(x,y) > 1 > f(x_0, y_0)$$

f admet donc un minimum global en (x_0, y_0). En ce point la différentielle est nulle donc les dérivées partielles sont solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\,x^3 - 4\,y = 0 \\ 4\,y^3 - 4\,x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = x^9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} ou \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} ou \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

f admet donc 3 points stationnaires : $A(0,0)$, $B(1,1), C(-1,-1)$. Or :

$$f(1,1) = f(-1,-1) = -2 < f(0,0)$$

Le minimum de f est donc -2 et il est atteint en $(1,1)$ et en $(-1,-1)$

3) Sur $D = [-1,1]^2$ g a pour minimum -2 et atteint en $(1,1)$ et en $(-1,-1)$.

g étant continue sur D qui est compact, elle y admet un maximum qu'elle atteint. Or on a :

$$g(-1,1) = 6 > f(0,0) = 0$$

Donc le maximum ne peut être atteint en un point intérieur de D sinon les dérivées partielles devraient y être nulles toutes deux. Le maximum est donc atteint sur la frontière constituée de 4 segments.

1er segment : $x = 1, -1 \leq y \leq 1$:

$$g(1, y) = 1 + y^4 - 4\,y = h(y)$$

$$h'(y) = 4\,y^3 - 4 = 4\,(y^3 - 1)$$

donc

$$\forall\, y \in [-1,1[\ :\ h'(y) < 0$$

Donc h est strictement décroissante sur $[-1,1]$ et donc atteint son maximum en -1 qui est :

$$h(-1) = 6$$

2ème segment : $x = -1, -1 \leq y \leq 1$:

$$g(1, y) = 1 + y^4 + 4\,y = k(y)$$

Une étude analogue au cas précédent montre que k atteint son maximum en 1 qui est :

$$k(1) = 6$$

On peut alors noter pour les deux autres segments qu'ils sont les symétriques des précédents par rapport à la bissectrice intérieure $y = x$ et que l'on a $f(x, y) = f(y, x)$.

On en déduit que g a pour minimum 6 qu'elle atteint en $(-1,1)$ et $(1, -1)$