Exercice 4

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'application φ définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$$

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2) Déterminer 4 polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 unitaires, de degrés respectifs $0, 1, 2, 3$, et deux à deux orthogonaux pour φ.

(On rappelle qu'un polynôme est unitaire si et seulement si il est non nul, et de coefficient dominant égal à 1).

3) On appelle a, b, c les trois racines de P_3, rangées dans l'ordre croissant : $a < b < c$.

Déterminer a, b, c.

4) Montrer qu'il existe un triplet unique (A, B, C) de réels tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_{-1}^{1} P(t)\ dt = AP(a) + BP(b) + CP(c)$$

et déterminer les réels A, B, C.

5) Montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_5[X], \int_{-1}^{1} P(t)\ dt = AP(a) + BP(b) + CP(c)$$

(On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n).

Corrigé :

1) On a pour tout $(P, P', Q, \alpha) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$:

$$\varphi(P + \alpha\, P', Q) = \int_{-1}^{1} (P + \alpha\, P')(t)\ \ Q(t)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, dt + \alpha \int_{-1}^{1} P'(t)\ \ Q(t)\, dt$$

$$= \varphi(P, Q) + \alpha\, \varphi(P', Q)$$

D'autre part :

$$\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$$

Donc :

$$\varphi(Q, P + \alpha\, P') = \varphi(Q, P) + \alpha\, \varphi(Q, P')$$

φ est donc une forme bilinéaire symétrique.

Montrons qu'elle est définie positive :

$$\varphi(P,P)=0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} P^2(t)\ dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in [-1,1]: P^2(t)=0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in [-1,1]: P(t)=0$$

$$\Leftrightarrow\ P=0$$

Donc φ est définie.

$$\varphi(P,P) \geq 0$$

Donc φ est positive et finalement un produit scalaire sur $\mathbb{E}$

2) Appliquons le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{E}$:

$$\boxed{P_0 = 1}$$

$$P_1 = X - \frac{\varphi(X,P_0)}{\varphi(P_0,P_0)}\ P_0$$

Où :

$$\varphi(X,P_0) = \int_{-1}^{1} t\ dt = 0$$

Donc :

$$\boxed{P_1 = X}$$

$$P_2 = X^2 - \frac{\varphi(X^2,P_0)}{\varphi(P_0,P_0)}\ P_0 - \frac{\varphi(X^2,P_1)}{\varphi(P_1,P_1)}\ P_1$$

Où :

$$\varphi(P_0,P_0) = \int_{-1}^{1} 1\ dt = 2$$

$$\varphi(X^2,P_0) = \int_{-1}^{1} t^2\ dt = \frac{2}{3}$$

$$\varphi(X^2, P_1) = \int_{-1}^{1} t^3 \ dt = 0$$

Donc :

$$\boxed{P_2 = X^2 - \frac{1}{3}}$$

$$P_3 = X^3 - \frac{\varphi(X^3, P_0)}{\varphi(P_0, P_0)} \ P_0 - \frac{\varphi(X^3, P_1)}{\varphi(P_1, P_1)} \ P_1 - \frac{\varphi(X^3, P_2)}{\varphi(P_2, P_2)} \ P_2$$

Où :

$$\varphi(P_1, P_1) = \int_{-1}^{1} t^2 \ dt = \frac{2}{3}$$

$$\varphi(X^3, P_0) = \int_{-1}^{1} t^3 \ dt = 0$$

$$\varphi(X^3, P_1) = \int_{-1}^{1} t^4 \ dt = \frac{2}{5}$$

$$\varphi(X^3, P_2) = \int_{-1}^{1} t^3 \ \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) \ dt = 0$$

Donc :

$$\boxed{P_3 = X^3 - \frac{3}{5} \ X}$$

3) On a :

$$P_3 = X \ \left(X^2 - \frac{3}{5}\right) = X \ \left(X - \sqrt{\frac{3}{5}}\right) \left(X + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

On a donc :

$$a = -\sqrt{\frac{3}{5}} \ , \quad b = 0, \qquad c = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

4) Posons : $P = \alpha \ X^2 + \beta \ X + \gamma$ alors :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\ dt = \alpha\ \int_{-1}^{1} t^2\ dt + \beta\ \int_{-1}^{1} t\ dt + \ \gamma\ \int_{-1}^{1} t\ dt = \frac{2}{3}\ \alpha + 2\,\gamma$$

Et :

$$A\ P(a) + B\ P(b) + C\ P(c) = A\ \left(\frac{3}{5}\ \alpha - \sqrt{\frac{3}{5}}\ \beta + \gamma\right) + B\ \gamma + C\ \left(\frac{3}{5}\ \alpha + \sqrt{\frac{3}{5}}\ \beta + \gamma\right)$$

Ainsi :

$$\forall\ P \in \mathbb{R}_2[X]\colon \int_{-1}^{1} P(t)\ dt = A\ P(a) + B\ P(b) + C\ P(c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{5}\ A + \dfrac{3}{5}\ C = \dfrac{2}{3} \\ -\sqrt{\dfrac{3}{5}}\ \ A + \sqrt{\dfrac{3}{5}}\ C = 0 \\ A + B + C = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{5}\ A = \dfrac{2}{3} \\ C = A \\ 2\ A + B = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{5}{9} \\ C = \dfrac{5}{9} \\ B = \dfrac{8}{9} \end{cases}$$

Donc :

$$\forall\ P \in \mathbb{R}_2[X]\colon \int_{-1}^{1} P(t)\ dt = \frac{5}{9}\ P\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}\ P(0) + \frac{5}{9}\ P\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

5) Soit $P \in \mathbb{R}_5[X]$ alors par division euclidienne :

$$\exists\ !\,(Q, R) \in (\mathbb{R}_5[X])^2\ :\ P = Q\ P_3 + R$$

Avec :

$$d°(R) < d°(P_3) = 3$$

Donc :

$$R \in \mathbb{R}_2[X]$$

Or :

$$(d°(P) = d°(R) \; et \; Q = 0) \; ou \; \; d°(P) = \; d°(Q) + d°(P_3)$$

Donc :

$$d°(Q) \leq 2$$

Et :

$$Q \in \mathbb{R}_2[X]$$

On a alors

$$\int_{-1}^{1} P(t) \; dt = \int_{-1}^{1} Q(t) \, P_3(t) \; dt + \int_{-1}^{1} R(t) \; dt$$

$$= 0 + \frac{5}{9} \, R(a) + \frac{8}{9} \, R(b) + \frac{5}{9} \, R(c)$$

$$= \frac{5}{9} \, P(a) + \frac{8}{9} \, P(b) + \frac{5}{9} \, P(c)$$