Exercice 3

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls, telle que la série entière de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = a_n x^n$$

ait un rayon de convergence réel R strictement positif, et telle que la série de terme général $u_n(R)$ soit divergente.
On considère la fonction somme S de cette série entière, soit :

$$\forall x \in]-R, R[, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1) Montrer que :

$$S(x) \underset{x \to R_-}{\longrightarrow} +\infty$$

2) On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in [-1, 1], f(x) = \arcsin x$$

Rappeler l'expression de la dérivée de f sur l'intervalle $]-1,1[$, et déterminer le développement en série entière de f' sur l'intervalle $]-1,1[$.
3) En déduire le développement en série entière de f sur l'intervalle $]-1,1[$, soit :

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

4) Montrer, en utilisant la question 1), que l'on a :

$$\forall x \in [-1, 1], f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Corrigé :

1) Soit $A > 0$ alors :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \sum_{n=0}^{n_0} a_n R^n > A$$

Or :

$$\forall\, x \in [0, R[: S(x) \geq \sum_{n=0}^{n_0} a_n x^n$$

Et :

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{n_0} a_n x^n = \sum_{n=0}^{n_0} a_n R^n > A$$

Donc :

$$\exists\ \alpha \in]0;+\infty[\ :\ \forall\ x\ \in\ ]R-\alpha, R[\ :\ \sum_{n=0}^{n_0} a_n\, x^n > A$$

On en déduit par comparaison :

$$\lim_{x \to R^-} S(x) = +\infty$$

2) On a :

$$\forall\ x\ \in\ ]-1,1[\ :f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n\right)}{n!}\ (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1\ \times 3 \ldots (2\,n-1)}{2^n}\ (-1)^n x^{2\,n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{(2\,n)\,!}{2^n\ \times 2 \times 4 \times \ldots \times (2\,n)}\ x^{2\,n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)\,!}{2^{2\,n}\,(n!)^2}\ x^{2\,n}$$

3) On déduit par intégration pour tout x de $]-1,1[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)\,!}{2^{2\,n}\,(n!)^2}\ \frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$

4) Le terme général $b_{\,n}$ du développement en série entière de $f(x)$ sur $]-1,1[$ est défini par :

$$\begin{cases} b_{2\,n} = 0 \\ b_{2\,n+1} = \dfrac{(2\,n)\,!}{2^{2\,n}\,(n!)^2} \times \dfrac{1}{2\,n+1} \end{cases}$$

Cette série entière est convergente sur $]-1,1[$ donc son rayon de convergence R vérifie :

$$R \geq 1$$

Or pour $x > 1$, considérons la série de terme général c_n défini par :

$$c_n = \frac{(2\,n)\,!}{2^{2\,n}\,(n!)^2}\ \frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$

On a :

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{b_{2\,n+3}}{b_{2\,n+1}}=\frac{(2\,n+2)\,(2\,n+1)(2\,n+1)\,x^2}{4\,(n+1)^2\,(2\,n+3)}\sim\frac{8\,n^3\,x^2}{8\,n^3}\sim x^2$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=x^2>1$$

La règle de D'Alembert montre alors que la série de terme général c_n diverge et donc :

$$R\leq 1$$

D'où :

$$R=1$$

Considérons alors la série entière de terme général $u_n(x)$ défini par :

$$u_n(x)=b_n\,x^n$$

Le rayon de convergence de cette série est $R=1$. Les termes b_n sont positifs ou nuls. Supposons alors par l'absurde que la série de terme général $u_n(1)$ diverge alors on aurait d'après 1) :

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,n)\,!}{2^{2\,n}\,(n!)^2}\frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}=+\infty$$

Donc :

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=+\infty$$

Soit :

$$\lim_{x\to 1^-}sin^{-1}(x)=+\infty$$

Ce qui est absurde.

Donc la série de terme général $u_n(1)=b_n$ converge. Or sur $[-1,1]$ on a :

$$\left|\frac{(2\,n)\,!}{2^{2\,n}\,(n!)^2}\,\frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}\right|\leq\frac{(2\,n)\,!}{2^{2\,n}\,(n!)^2}\,\frac{1}{2\,n+1}=b_n$$

La série entière de terme général $u_n(x)$ est donc normalement convergente sur $[-1,1]$ donc sa somme $S(x)$ est continue sur $[-1,1]$. On en déduit :

$$S(1)=\lim_{x\to 1^-}S(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$$

$$S(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}S(x)=\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=f(-1)$$

Ainsi :

$$\forall\,x\in[-1,1]:\ f(x)=S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\,x^n$$