

Exercice 2

On considère l'intégrale généralisée suivante, où x désigne un nombre réel :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+xt)}}$$

1) Montrer que cette intégrale est définie si et seulement si le réel x appartient à l'intervalle $I =]-1, +\infty[$.

Dans la suite, on considèrera la fonction réelle de la variable réelle x définie par :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+xt)}}$$

2) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I .

3) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de I .

4) Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

5) Déterminer, suivant les valeurs du réel x , une expression de $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

On pourra utiliser le changement de variable :

$$u = \sqrt{\frac{1+xt}{1-t}}$$

Corrigé

1) Commençons par la définition de l'intégrande en posant :

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+xt)}}$$

si $x \geq 0$, on a pour tout $t \in [0, 1[$: $1-t > 0, 1+xt > 0$ donc $g(x, t)$ est définie

si $x < 0$, $g(x, t)$ est définie pour tout $t \in [0, 1[$ si et seulement si :

$$\forall t \in [0, 1[: 1+xt > 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in [0, 1[: xt > -1$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in [0, 1[: t < -\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1$$

Donc $g(x, t)$ est définie pour tout $t \in [0, 1[$ si et seulement si $x \in [-1, +\infty[$

Etudions maintenant la convergence de l'intégrale impropre en 1.

Pour $x \in]-1, +\infty[$ on a en $t = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+xt)}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-t}} \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

L'intégrale est donc convergente en 1.

Pour $x = -1$ on a en $t = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+xt)}} \sim \frac{1}{1-t}$$

L'intégrale est donc divergente en 1.

f est donc définie sur $]-1, +\infty[$

2) Soit $-1 < x < y$ alors :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+xt}} - \frac{1}{\sqrt{1+yt}} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \left(\frac{\sqrt{1+yt} - \sqrt{1+xt}}{\sqrt{1+xt}\sqrt{1+yt}} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \left(\frac{(1+yt) - (1+xt)}{\sqrt{1+xt}\sqrt{1+yt}(\sqrt{1+yt} + \sqrt{1+xt})} \right) dt \\ &= (y-x) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \left(\frac{t}{\sqrt{1+xt}\sqrt{1+yt}(\sqrt{1+yt} + \sqrt{1+xt})} \right) dt \end{aligned}$$

Posons :

$$h(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \left(\frac{t}{\sqrt{1+xt}\sqrt{1+yt}(\sqrt{1+yt} + \sqrt{1+xt})} \right)$$

$h(x, t)$ est une fonction continue de la variable t et strictement positive sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

Donc :

$$\int_0^1 h(x, t) dt \geq \int_0^{\frac{1}{2}} h(x, t) dt > 0$$

Or : $y - x > 0$ donc :

$$f(x) - f(y) > 0$$

Ainsi f est strictement décroissante sur $] -1, +\infty[$

3) limite en -1

posons $x = -1 + h$ pour $h > 0$:

$$\begin{aligned} f(-1 + h) &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t)(1-t+h)}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2 + h(1-t)}} dt \geq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2 + h}} dt \end{aligned}$$

Faisons un changement de variable :

$$1 - t = u, \quad dt = -du$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2 + h}} dt &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^2 + h}} du \\ &= \left[\operatorname{Ln} \left| u + \sqrt{u^2 + h} \right| \right]_0^1 = \operatorname{Ln}(1 + \sqrt{1+h}) - \operatorname{Ln}(\sqrt{h}) \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \operatorname{Ln}(1 + \sqrt{1+h}) - \operatorname{Ln}(\sqrt{h}) = +\infty$$

On en déduit par comparaison :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(-1 + h) = +\infty$$

limite en $+\infty$: On a :

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t)xt}} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t)t}} dt$$

L'intégrale majorante étant définie car en 0 on a :

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t)t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Le théorème des gendarmes montre alors que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

4) On a :

$$f(0) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = \left[-2\sqrt{1-t} \right]_0^1 = 2$$

$$f(1) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \left[\sin^{-1}(t) \right]_0^1 = \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

5) On pose :

$$u = \sqrt{\frac{1+xt}{1-t}}$$

Alors :

$$u^2 = \frac{1+xt}{1-t}$$

$$u^2(1-t) = 1+xt$$

$$u^2 - u^2 t = 1+xt$$

$$t = \frac{u^2 - 1}{u^2 + x} = 1 - \frac{x+1}{u^2 + x}$$

$$dt = \frac{2u(x+1)}{(u^2+x)^2} du$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \frac{1}{1-t} \sqrt{\frac{1-t}{1+xt}} dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{u^2+x}{x+1} \frac{1}{u} \frac{2u(x+1)}{(u^2+x)^2} du \\ &= 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+x} du \end{aligned}$$

Distinguons 3 cas :

1er cas : $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2 + (\sqrt{x})^2} du \\ &= 2 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \tan^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{x}} \right) \right]_1^{+\infty} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right)$$

2ème cas : $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} du \\ &= 2 \left[-\frac{1}{u} \right]_1^{+\infty} = 2 \end{aligned}$$

3ème cas : $-1 < x < 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2 - (\sqrt{-x})^2} du \\ &= 2 \left[\frac{1}{2\sqrt{-x}} \operatorname{Ln} \left| \frac{u + \sqrt{-x}}{u - \sqrt{-x}} \right| \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{Ln} \left(\frac{1 + \sqrt{-x}}{1 - \sqrt{-x}} \right) \end{aligned}$$