Exercice 1

On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}^3$.
A tout endomorphisme u de E, et à tout vecteur V de E, on associe le système de vecteurs de E :

$$S(u, V) = (V, u(V), u^2(V))$$

(On rappelle que $u^2 = u \circ u$).
On dit que l'endomorphisme u de E est cyclique si et seulement si il existe un vecteur V de E tel que le système $S(u, V)$ soit une base de E.
1) Montrez que si l'endomorphisme u est cyclique, on a $rg(u) \geqslant 2$.
Montrez à l'aide d'un exemple que la réciproque est fausse.
2) On considère l'endomorphisme u de E dont la matrice par rapport à la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

et le vecteur V défini par :

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que le système $S(u, V)$ est une base de E, et en déduire que l'endomorphisme u est cyclique.

3) Soit u un endomorphisme cyclique, et V un vecteur de E tel que $S(u, V)$ soit une base de E. Donner la forme de la matrice de u par rapport à la base $S(u, V)$, et montrer que cette matrice est indépendante du choix du vecteur V.
4) Montrer que si l'endomorphisme u est cyclique, tous les sous-espaces propres de u sont de dimension 1.
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme cyclique soit diagonalisable.

Corrigé :

1) Soit u un endomorphisme cyclique de $\mathbb{E}$.

Soit $v_0 \in \mathbb{E}$ tel que $\left(v_0, u(v_0), u^2(v_0)\right)$ soit une base de $\mathbb{E}$, alors :

$$Im(u) = Vect\left(u(v_0), u^2(v_0), u^3(v_0)\right)$$

Or $\left(\, u(v_0), u^2(v_0)\right)$ est libre donc :

$$dim\left(Im(u)\right) \geq 2$$

Montrons que la réciproque est fausse en prenant $u = Id_{\mathbb{E}}$. On a $rg(u) = 3$ et u non cyclique.

2) On a :

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A\,V = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, A^2\,V = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$Det(V, A\,V, A^2\,V) = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -36 - 4 \times 36 \neq 0$$

Donc $(V, A\,V, A^2\,V)$ est une base de $\mathbb{E}$ et u est cyclique.

3) On a :

$$\begin{cases} u(V) = 0\,V + 1\,u(V) + 0\,u^2(V) \\ u\big(u(V)\big) = 0\,V + 0\,u(V) + 1\,u^2(V) \\ u\big(u^2(V)\big) = a\,V + b\,u(V) + c\,u^2(V) \end{cases}$$

La matrice de u dans $S(u, V)$ est donc :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

C'est une matrice compagnon dont le polynôme caractéristique est :

$$P_B(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & a \\ 1 & -X & b \\ 0 & 1 & c - X \end{vmatrix}$$

$$= -X \begin{vmatrix} -X & b \\ 1 & c - X \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & c - X \end{vmatrix}$$

$$= -X\,(-X\,(c - X) - b) + a$$

$$= -X^3 + c\,X^2 + b\,X + a$$

Or deux matrices semblables ayant même polynôme caractéristique, on en déduit que la matrice B est indépendante du choix de V.

4) Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme cyclique u, alors :

Décrivons un vecteur W de $\mathbb{E}$ par ses coordonnées (x, y, z) dans une base $S(u, V)$. Alors

$$W \in \mathbb{E}_\lambda \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & a \\ 1 & -\lambda & b \\ 0 & 1 & c - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda\,x + a\,z = 0 \\ x - \lambda\,y + b\,z = 0 \\ y + (c - \lambda)\,z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-\lambda\,(\lambda\,(\lambda - c)\ - b) + a)\,z = 0 \\ x = \lambda\,y - b\,z \\ y = (\lambda - c)\,z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} ou \begin{cases} (-\lambda\,(\lambda\,(\lambda - c)\ - b) + a) = 0 \\ x = (\lambda\,(\lambda - c) - b)\,z \\ y = (\lambda - c)\,z \end{cases}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}_\lambda = \left\{W = z\left((\lambda\,(\lambda - c) - b)\,V + (\lambda - c)\,u(V) + u^2(V)\right), z \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= Vect[(\lambda\,(\lambda - c) - b)\,V + (\lambda - c)\,u(V) + u^2(V)]$$

Le vecteur générateur de $\mathbb{E}_\lambda$ est non nul donc :

$$dim(\mathbb{E}_\lambda) = 1$$

Soit un endomorphisme cyclique u. Montrons que l'on a :

$$u \text{ diagonalisable } \Leftrightarrow\ u \text{ a 3 valeurs propres distinctes}$$

$(\Rightarrow)$ Supposons u diagonalisable alors $\mathbb{E}$ est somme directe de ses sous espaces propres :

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_{\lambda_1} \oplus \mathbb{E}_{\lambda_2} \dots \oplus \mathbb{E}_{\lambda_p}$$

et chaque sous espace propre a pour dimension 1 donc :

$$dim(\mathbb{E}) = dim\left(\mathbb{E}_{\lambda_1}\right) + dim\left(\mathbb{E}_{\lambda_2}\right) + \cdots + dim\left(\mathbb{E}_{\lambda_p}\right)$$

Soit :

$$3 = p$$

u a donc 3 valeurs propres distinctes.

$(\Leftarrow)$ Supposons u a 3 valeurs propres distinctes alors, puisque $dim(\mathbb{E}) = 3$, u est diagonalisable