Exercice 1

Soit n un entier naturel, et $E = M_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$.
Soit A une matrice appartenant à E.
On considère l'application φ_A définie par :

$$\forall X \in E,\ \varphi_A(X) = AX$$

1) Montrer que φ_A est un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

2) Montrer que φ_A est inversible (c'est-à dire : φ_A est un automorphisme de E) si et seulement si la matrice A est inversible.
Donner alors une définition de l'application $(\varphi_A)^{-1}$ analogue à celle de φ_A.

3) On suppose que $n = 2$, et que les matrices A, I_2 et O_2 sont ainsi définies :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(On rappelle que $tr(A) = a + d$ et $\det(A) = ad - bc$)
Montrer que :

$$A^2 - tr(A)A + det(A)I_2 = O_2$$

Montrer que l'application φ_A vérifie :

$$\varphi_A^2 - tr(A)\varphi_A + det(A)I = O$$

(en notant I et O l'identité et l'endomorphisme nul de E)

4) On suppose toujours que $n = 2$ et que la matrice A est diagonalisable.
Montrer que l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

5) Application : on suppose que la matrice A est ainsi définie :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que la matrice A est diagonalisable.
b) Déterminer une base $B = (V_1, V_2)$ de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de A.
c) En déduire que φ_A est diagonalisable, et donner une base B_1 de $M_2(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de φ_A.

Corrigé

1) On a :

$$\forall\ (X, Y, \alpha) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{C} :$$

$$\varphi_A(X + Y) = A\ (X + Y) = A\ X + A\ Y = \varphi_A(X) + \varphi_A(Y)$$

$$\varphi_A(\alpha\ X) = A\ (\alpha\ X) = \alpha\ \varphi_A(X)$$

donc φ_A est linéaire et donc un endomorphisme du $\mathbb{C}$ −espace $\mathbb{E}$

2) La condition nécessaire et suffisante pour que φ_A soit inversible est que son noyau soit réduit au vecteur nul. Or, en désignant par $0_{\mathbb{E}}$ la matrice nulle de $\mathbb{E}$:

$$\varphi_A(X) = 0_{\mathbb{E}} \Leftrightarrow A\,X = 0_{\mathbb{E}}$$

Donc :

Si A inversible : $\varphi_A(X) = 0_{\mathbb{E}} \Leftrightarrow A^{-1}(A\,X) = 0_{\mathbb{E}} \Leftrightarrow X = 0_{\mathbb{E}}$ et le noyau de φ_A se réduit à la matrice nulle de $\mathbb{E}$ donc φ_A est injective donc est un automorphisme de $\mathbb{E}$.

Si A non inversible : $\exists\, V_1 \in M_{n1}(\mathbb{C}) : A\,V_1 = 0$. Considérons alors la matrice X_1 de $\mathbb{E}$ dont la première colonne est V_1et les $n-1$ colonnes restantes sont des colonnes nulles. Alors :

$$\varphi_A(X_1) = A\,X_1 = 0_{\mathbb{E}}$$

Donc le noyau de φ_A n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathbb{E}$ et ainsi φ_A n'est pas injective. Il en résulte :

$$\boxed{\varphi_A \text{ automorphisme de } \mathbb{E} \Leftrightarrow A \text{ inversible}}$$

Déterminons alors la réciproque de φ_A

$$\forall\,(X,Y) \in \mathbb{E}^2:$$

$$\varphi_A(X) = Y \Leftrightarrow A\,X = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y \Leftrightarrow X = \varphi_{A^{-1}}(Y)$$

Donc :

$$\boxed{(\varphi_A)^{-1} = \varphi_{A^{-1}}}$$

3)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b\,c & a\,c + c\,d \\ a\,b + b\,d & b\,c + d^2 \end{pmatrix}$$

$$tr(A)\,A = (a+d)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + a\,d & a\,c + d\,c \\ a\,b + d\,b & a\,d + d^2 \end{pmatrix}$$

$$det(A)\,I_2 = (a\,d - b\,c)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,d - b\,c & 0 \\ 0 & a\,d - b\,c \end{pmatrix}$$

On vérifie alors aisément :

$$A^2 - tr(A)\,A + det(A)\,I_2 = O_2$$

A noter qu'il s'agit du théorème de Cayley Hamilton énonçant que le polynôme caractéristique d'une matrice carrée est un polynôme annulateur de cette matrice

Notons les propriétés triviales à démontrer de φ_A :

$$\varphi_{O_2} = 0$$

$$\varphi_{A+B} = \varphi_A + \varphi_B$$

$$\varphi_{\alpha\, A} = \alpha\, \varphi_A$$

$$\varphi_{A\, B} = \varphi_A \circ \varphi_B$$

$$\varphi_{I_2} = I$$

Ainsi :

$$\varphi_{A^2 - tr(A)\, A + det(A)\, I_2} = \varphi_{O_2}$$

donc :

$$(\varphi_A)^2 - tr(A)\, \varphi_A + det(A)\, \varphi_{I_2} = 0$$

d'où :

$$\boxed{(\varphi_A)^2 - tr(A)\, \varphi_A + det(A)\, I = 0}$$

4) On suppose $n = 2$ et A diagonalisable

Premier cas : A n'a qu'une valeur propre λ alors :

$$A = \lambda\, I_2$$

Ainsi :

$$\varphi_A = \varphi_{\lambda\, I_2} = \lambda\, \varphi_{\, I_2} = \lambda\, I$$

donc φ_A est diagonalisable avec pour unique valeur propre λ si $\lambda \neq 0$

Deuxième cas : A a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. Soit alors deux vecteurs propres non nuls V_1 et V_2 associés respectivement à chaque valeur propre. On a :

$$A\, V_1 = \lambda_1\, V_1 \quad , A\, V_2 = \lambda_2\, V_2$$

Soit X_{11} la matrice carrée d'ordre 2 dont la première colonne est V_1 et la seconde la colonne nulle et X_{12} la matrice carrée d'ordre 2 dont la première colonne est la colonne nulle et la seconde la colonne V_1. Alors on a :

$$\varphi_A(X_{11}) = \lambda_1\, X_{11}$$

$$\varphi_A(X_{12}) = \lambda_1\, X_{12}$$

Ainsi X_{11} et X_{12} forme un système libre de vecteurs propres associés à λ_1

On peut définir de façon analogue deux matrices carrées X_{21} et X_{22} formant un système libre de vecteurs propres associés à λ_2

La famille $(X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22})$ forme alors une base de vecteurs propres de φ_A donc φ_A est diagonalisable

5)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Déterminons de polynôme caractéristique de A:

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -2-X & 4 \\ -5 & 7-X \end{vmatrix} = (-2-X)\,(7-X) + 20$$

$$= X^2 - 5\,X + 6 = (X-2)\,(X-3)$$

Le polynôme caractéristique de A étant scindé avec des racines simples, A est diagonalisable et admet pour valeurs propres 2 et 3

Déterminons une base de vecteurs propres.

Pour $\lambda = 2$ on résout pour une colonne à deux lignes X:

$$(A - 2\,I_2)\,X = 0$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4\,x + 4\,y = 0 \\ -5\,x + 5\,y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ x = y$$

Un vecteur propre non nul associé à la valeur propre 2 est donc :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De la même façon, on résout :

$$(A - 3\,I_2)\,X = 0$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5\,x + 4\,y = 0 \\ -5\,x + 4\,y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 5\,x = 4\,y$$

Un vecteur propre non nul associé à la valeur propre 3 est donc :

$$V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Une base de vecteurs propres de φ_A est alors :

$$(V_{11}, V_{12}, V_{21}, V_{22})$$

avec :

$$V_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;, V_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , V_{21} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \;, V_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$