Exercice 5

On considère la fonction f réelle de deux variables réelles définie par :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0,0)\}, f(x,y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} \qquad (1)$$

1) Montrer que f est prolongeable par continuité en $(0,0)$, ~~et préciser, en~~ appelant également f le prolongement par continuité, la valeur de $f(0,0)$.

2) Montrer que pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $A > 0$, dépendant de ϵ, tel que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus [0,A]^2,\ 0 \leqslant f(x,y) < \epsilon \qquad (2)$$

3) En déduire que la fonction f a un maximum global sur $(\mathbb{R}_+)^2$.

4) Montrer que le maximum de la fonction f sur $(\mathbb{R}_+)^2$, est atteint en un point unique (a,b) que l'on déterminera.

Corrigé

1)

Soit $(x,y) \in [0;+\infty[^2 \backslash \{(0,0)\}$ alors pour $x \neq 0$:

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{x\,y}{(1+0)\,(1+0)\,(x+0)} = y$$

et pour $y \neq 0$:

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{x\,y}{(1+0)\,(1+0)\,(y+0)} = x$$

Introduisons la norme infinie :

$$\|(x,y)\|_\infty = sup(|x|,|y|)$$

alors :

$$0 \leq f(x,y) \leq \|(x,y)\|_\infty$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$$

On peut donc prolonger f par continuité en posant :

$$\boxed{f(0,0) = 0}$$

2)

Soit $(x,y) \in]0;+\infty[^2$ alors on a :

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{x\,y}{(0+x)\,(0+y)\,(x+y)} = \frac{1}{x+y}$$

Donc :

$$0 \leq f(x,y) \leq sup\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$ posons :

$$A = \frac{1}{\varepsilon}$$

Soit $(x,y) \in [0;+\infty[^2 \backslash [0,A]^2$ alors

Si $x = 0$ ou $y = 0$ alors $f(x,y) = 0$ donc

$$0 \leq f(x,y) < \varepsilon$$

Sinon $x > A$ et $y > A$ donc :

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{A} = \varepsilon, \quad \frac{1}{y} < \frac{1}{A} = \varepsilon$$

Soit :

$$sup\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right) < \varepsilon$$

d'où :

$$0 \leq f(x,y) < \varepsilon$$

3) Notons que :

$$f(1,1) = \frac{1}{8}$$

et pour $\varepsilon = \frac{1}{8}$ on a :

$$\forall\,(x,y) \in [0;+\infty[^2 \backslash [0,8]^2 :\; 0 \leq f(x,y) < \frac{1}{8}$$

Or f est continue sur le domaine compact $[0,8]^2$ donc elle admet un maximum qu'elle atteint en un point (x_0,y_0). Ainsi :

$$f(x_0,y_0) \geq f(1,1) = \frac{1}{8}$$

Donc $f(x_0,y_0)$ est également le maximum global de la fonction sur $[0;+\infty[^2 \backslash \{(0,0)\}$

4) Notons d'abord que f est nulle sur la frontière de $[0;+\infty[^2\backslash\{(0,0)\}$. Le (ou les) point(s) en lesquel(s) la fonction atteint son maximum est (sont) donc intérieurs au domaine $[0,8]^2$. Or f est différentiable sur l'intérieur de ce domaine. Un point $M(x,y)$ de ce dernier en lequel f atteint son maximum vérifie donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(M) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(M) = 0 \end{cases}$$

Or :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{y\,(1+x)(1+y)(x+y) - x\,y\,(1+y)[(x+y)+(1+x)]}{(1+x)^2\,(1+y)^2\,(x+y)^2} =$$

$$= \frac{y\,(1+y)\,[(1+x)\,(x+y) - x\,(2\,x+y+1)]}{(1+x)^2\,(1+y)^2\,(x+y)^2}$$

$$= \frac{y\,(1+y)\,(y-x^2)}{(1+x)^2\,(1+y)^2\,(x+y)^2}$$

De même par échange de x et de y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{x\,(1+x)\,(x-y^2)}{(1+x)^2\,(1+y)^2\,(x+y)^2}$$

Ainsi le système précédent équivaut à

$$\begin{cases} y\,(1+y)\,(y-x^2) = 0 \\ x\,(1+x)\,(x-y^2) = 0 \end{cases}$$

Comme $x > 0$ et $y > 0$ il équivaut à :

$$\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ x - y^2 = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} y = y^4 \\ x = y^2 \end{cases}$$

Soit :

$$x = y = 1$$

La fonction f admet donc pour maximum $\frac{1}{8}$ et elle l'atteint en un point unique $A(1,1)$