Exercice 4

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |\sin x| \qquad (1)$$

1) Déterminer la série de Fourier de f, et en déduire qu'il existe une suite réelle (a_n), que l'on explicitera, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2nx) \qquad (2)$$

2) Montrer que pour tout entier naturel m, il existe un polynôme unique P_m de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \cos(mu) = P_m(\cos u) \qquad (3)$$

3) En déduire que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme R_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2nx) = R_n(\sin x) \qquad (4)$$

4) En déduire qu'il existe une suite de fonctions polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction g définie par :

$$\forall x \in [-1, 1], g(x) = |x| \qquad (5)$$