Exercice 5 *1) a) Montrer qu'il existe une et une seule fonction réelle de deux variables réelles f définie par :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$$

et définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
Quelle est la valeur de $f(0,0)$?
b) La fonction f est-elle de classe C^1 ?

2) a) Montrer que f n'a pas d'extremum sur $\mathbb{R}^2$.
Préciser l'image de $\mathbb{R}^2$ par f.
b) Soit A le disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
Montrer que la restriction g de f à A admet un minimum m et un maximum M, et déterminer les points où la valeur m est atteinte par g, et les points où la valeur M est atteinte par g.
c) Soit $B = [-1,1]^2$.
Montrer que la restriction h de f à B admet un minimum s et un maximum S, et déterminer les points où la valeur s est atteinte par h, et les points où la valeur S est atteinte par h.

Corrigé :

1)

a) Si f admet une limite L en $(0,0)$ alors en particulier, on a :

$$L = \lim_{x \to 0} f(x,0)$$

Or si $x \neq 0$:

$$f(x,0) = x$$

donc L ne peut être que 0. Montrons maintenant que f a bien pour limite 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$ en cherchant une majoration du type :

$$|f(x,y)| \leq K\, \|(x,y)\|$$

où Kest une constante et $\|(x,y)\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$

Notons ainsi que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ on a :

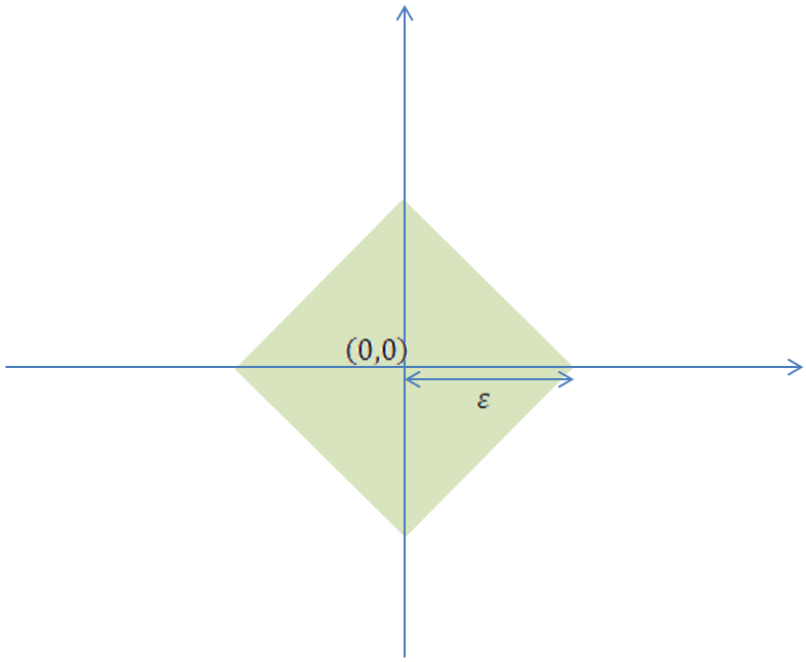
$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}\ |x| + \frac{y^2}{x^2 + y^2}\ |y| \leq |x| + |y| = \|(x,y)\|_1$$

Donc :

Pour $\varepsilon > 0$, en prenant $\alpha = \varepsilon$ on a :

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}\ :\quad \|(x,y)\|_1 < \alpha \Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon$$

Cela se traduit géométriquement, rappelons le par le fait, que $|f(x,y)|$ est strictement inférieure à ε sur une boule ouverte de rayon ε associée à la norme 1 qui n'est autre que le carré de demi diagonale ε de la figure ci-dessous.



et ainsi :

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$$

On peut donc prolonger f par continuité en posant :

$$\boxed{f(0,0) = 0}$$

b) Voyons si f admet des dérivées partielles en $(0,0)$

Pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$ on a :

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \frac{-y^3}{y^3} = -1$$

Donc f admet des dérivées partielles qui sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1 \end{cases}$$

Posons :

$$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\|(x,y)\|_2}$$

$$= \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - x + y\right)\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \left(\frac{x^3 - y^3 - (x^2 + y^2)(x - y)}{x^2 + y^2}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{y\,x^2 - x\,y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Si on se donne une courbe de la forme $x = t\,y$ par exemple avec $t = 2$, on a :

$$\varepsilon(2\,y, y) = \frac{4\,y^3 - 2\,y^3}{(4\,y^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{5^{\frac{3}{2}}}$$

Donc :

$$\lim_{y \to 0} \varepsilon(2\,y, y) \neq 0$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{(x,y) \to (0,0)} \varepsilon(x,y) \neq 0}$$

f n'est donc pas différentiable en $(0,0)$. f est donc de classe $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$

2)

a) On a pour $x \neq 0$

$$f(x,0) = x$$

Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x,0) = -\infty$$

et la fonction $f(x,0)$ si on inclut x =0 décrit donc par continuité $\mathbb{R}$.

f n'a donc ni maximum ni minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$ et l'image de $\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}$

b)

Notons tout d'abord que l'on a :

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^3 = y^3$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

$$f(x,y) > 0 \Leftrightarrow x^3 > y^3$$

$$\Leftrightarrow x > y$$

$$f(y,x) = -f(x,y)$$

Ces remarques permettent d'affirmer que la nappe d'équation $z = f(x,y)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = y, z = 0$. Notons alors :

$$\mathfrak{D}_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$$

$$\mathfrak{D}_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$$

$$\mathfrak{D}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$$

Si $\mathcal{K}$ est alors un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2$symétrique par rapport à $\mathfrak{D}_0$, on aura :

f admet un maximum et un minimum sur $\mathcal{K}$ et le maximum de f n'est atteint que sur $\mathcal{K} \cap \mathfrak{D}_+$ et le minimum sur $\mathcal{K} \cap \mathfrak{D}_-$. De plus :

$$Min_{\mathcal{K}\cap\mathfrak{D}_-}(f) = -Max_{\mathcal{K}\cap\mathfrak{D}_+}(f)$$

Reste à savoir si le maximum ou le minimum peut être atteint en un point intérieur à $\mathcal{K}$ en étudiant les points stationnaires. Pour cela on résout pour $M \neq O$ le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(M) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(M) = 0 \end{cases}$$

Or :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{3\,x^2\,(x^2+y^2) - 2\,x\,(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x\,(x^3+3\,x\,y^2+2\,y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

De même par échange de x et de y et inversion de signe

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{-y\,(y^3+3\,y\,x^2+2\,x^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

Ainsi le système précédent équivaut à

$$\begin{cases} x\,(x^3+3\,x\,y^2+2\,y^3) = 0 \\ y\,(y^3+3\,y\,x^2+2\,x^3) = 0 \end{cases}$$

Notons que $x = 0$ ou $y = 0$ ne conduit à aucune solution, donc le système équivaut à :

$$\begin{cases} x^3 + 3\,x\,y^2 + 2\,y^3 = 0 \\ y^3 + 3\,y\,x^2 + 2\,x^3 = 0 \end{cases}$$

Or la différence des deux équations donne :

$$x^3 - y^3 + 3\,x\,y^2 - 3\,y\,x^2 + 2\,y^3 - 2\,x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\,(x^3 - y^3) - 3\,x\,y\,(x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + x\,y + y^2) + 3\,x\,y\,(x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + 4\,x\,y + y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \;\; ou \;\; x^2 + 4\,x\,y + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \;\; ou \;\; (x + 2y)^2 - 3\,y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \;\; ou \;\; x + 2y = \sqrt{3}\,y \;\; ou\, x + 2y = -\sqrt{3}\,y$$

$$\Leftrightarrow x = y \;\; ou \;\; x = \left(-2 + \sqrt{3}\right) y \;\; ou\, x = \left(-2 - \sqrt{3}\right) y\, y$$

Or $x = y$ reporté dans le système précédent conduit à $x = y = 0$ donc aucune solution.
Voyons pour les deux autres cas tous deux définis par :

$$x = \left(-2 + \varepsilon\,\sqrt{3}\right) y$$

Avec $\varepsilon = 1\; ou -1$

Reportant dans la première équation du système on obtient :

$$\left(-2 + \varepsilon\,\sqrt{3}\right)^3 y^3 + 3\left(-2 + \varepsilon\,\sqrt{3}\right)^2 y^3 + 2\; y^3 = 0$$

Soit, compte tenu de $y \neq 0$:

$$\left(-2 + \varepsilon\,\sqrt{3}\right)^2 \left(\left(-2 + \varepsilon\,\sqrt{3}\right) + 3\right) + 2 = 0$$

$$\left(7 - 4\,\varepsilon\,\sqrt{3}\right)\left(1 + \varepsilon\,\sqrt{3}\right) + 2 = 0$$

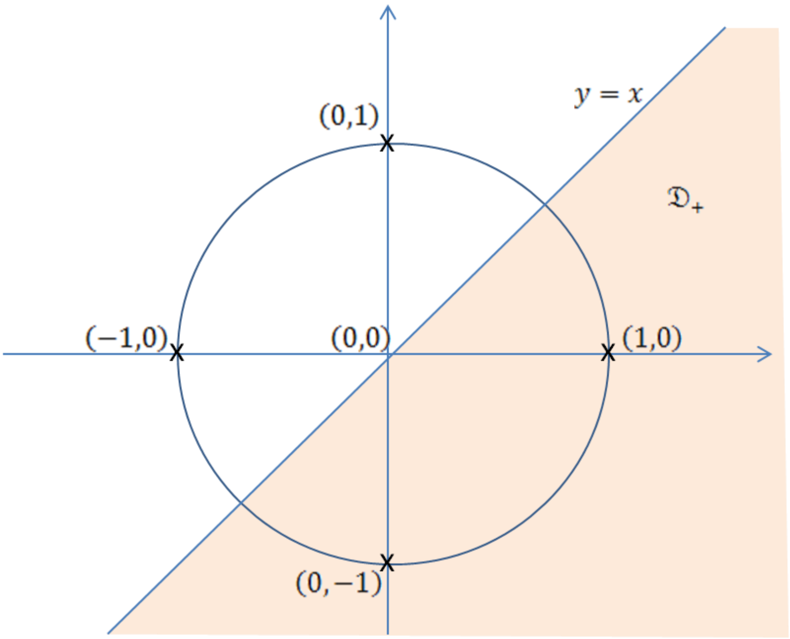
$$7 - 12 + 7\,\varepsilon\,\sqrt{3} - 4\,\varepsilon\,\sqrt{3} + 2 = 0$$

$$4 - 3\,\varepsilon\,\sqrt{3} = 0$$

ce qui est absurde car ce dernier nombre est un irrationnel.

f n'admet donc aucun point stationnaire donc ni maximum ni minimum local ou global.

La restriction g de f au disque $\mathcal{A}$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1 atteint donc son maximum et son minimum sur le cercle $\mathcal{C}_0$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1 et plus précisément le maximum sur $\mathcal{C}_0 \cap \mathfrak{D}_+$ et le minimum sur $\mathcal{C}_0 \cap \mathfrak{D}_-$



Or sur $\mathcal{C}_0 \cap \mathfrak{D}_+$ on a :

$$x^2 + y^2 = 1$$

donc

$$|x| \leq 1\,, \quad |y| \leq 1$$

et si $|x| < 1 \; ou \;\; |y| < 1$ alors

$$f(x,y) = x^3 - y^3 \leq |x|^3 + |y|^3 < |x|^2 + |y|^2 = 1$$

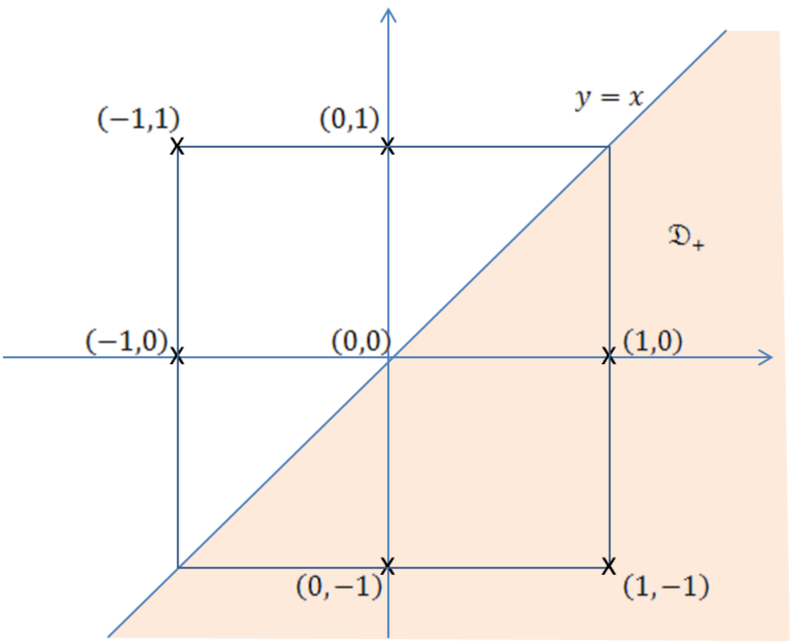
Or :

$$f(1,0) = f(0,-1) = 1$$

donc g admet sur $\mathcal{A}$ un maximum égal à 1 atteint en $(1,0)$ et $(0,-1)$ et par symétrie un minimum égal à -1 atteint en $(0,1)$ et $(-1,0)$

c)

La restriction h de f au carré $\mathcal{B} = [-1,1]^2$ atteint donc son maximum et son minimum sur la frontière $\mathcal{B}_0$ de ce carré et plus précisément le maximum sur $\mathcal{B}_0 \cap \mathfrak{D}_+$ et le minimum sur $\mathcal{B}_0 \cap \mathfrak{D}_-$



Or sur $\mathcal{B}_0 \cap \mathfrak{D}_+$ on a :

si $y \neq 0$ et $|y| < 1$ alors

$$f(1,y) = \frac{1-y^3}{1+y^2} \leq \frac{1+|y|^3}{1+y^2} < \frac{1+y^2}{1+y^2} = 1$$

si $x \neq 0$ et $|x| < 1$ alors

$$f(x,0) = \frac{x^3-1}{x^2+1} \leq \frac{|x|^3+1}{x^2+1} < \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$$

Or :

$$f(1,0) = f(0,-1) = f(1,-1) = 1$$
$$f(-1,1) = -1$$

donc h admet sur $\mathcal{B}$ un maximum égal à 1 atteint en $(1,0)$, $(0,-1)$ et $(1,-1)$ et par symétrie un minimum égal à -1 atteint en $(0,1)$ et $(-1,0)$ et $(-1,1)$