Exercice 2 *On considère la fonction f réelle de deux variables réelles x et t définie par :*

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, f(x,t) = e^{x \sin t}$$

et la fonction g réelle de la variable réelle x définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \sin t}\, dt$$

1) a) Montrer que la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle est de classe C^1, et déterminer une expression de la dérivée $g'(x)$.
Préciser le signe de $g'(x)$.
b) Démontrer la double inégalité :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2t}{\pi} \leq \sin t \leq t$$

c) En déduire une majoration de $g(x)$ pour x négatif ou nul, et une minoration de $g(x)$ pour x positif ou nul.
d) Déterminer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $-\infty$ et $+\infty$.
Déterminer la limite de $\frac{g(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
e) Déterminer les variations de g et tracer sa représentation graphique.

2) a) Montrer que la fonction g est développable en série entière.
On écrira ce développement sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et on exprimera a_n à l'aide de l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$$

NB : on ne cherchera pas à calculer une expression de I_n.
b) Montrer que la fonction g est de classe C^2 et est solution de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' - xy = 0 \qquad (E)$$

c) En déduire une relation entre I_{n+1} et I_{n-1} pour tout entier naturel n non nul.
d) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle (E), et déterminer parmi celles-ci la fonction g.

3) La fonction g est-elle intégrable sur $]-\infty, 0]$?

<u>Corrigé</u> :

1)

a) $f(x,t)$ est continue en tant que fonction de deux variables sur $\mathbb{R} \times \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

De plus, f admet sur $\mathbb{R} \times \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,t) = sin(t)\,e^{x\,sint(t)}$$

qui est continue sur le même domaine donc g est de classe C_1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial f}{\partial x}\,(x,t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\,e^{x\,sint(t)}\,dt$$

Posons :

$$h(x,t) = sin(t)\,e^{x\,sint(t)}$$

Pour x réel fixé, $h(x,t)$ en tant que fonction de t est continue, positive ou nulle et non identiquement nulle sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc son intégrale sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ est strictement positive, d'où :

$$g'(x) > 0$$

g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b)

La fonction $sin(t)$ est concave sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, sa courbe est donc comprise entre sa tangente en 0 et sa corde entre les points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$. Or la tangente a pour équation :

$$y = sin'(0)t + sin(0)$$

Soit :

$$y = t$$

et la corde a pour coefficient directeur :

$$a = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

donc pour équation

$$y = \frac{2}{\pi}\,t$$

Il en résulte sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{2}{\pi}\, t \leq sin(t) \leq t$$

c)

Soit $x \leq 0$ alors $-x \geq 0$ donc $\forall\, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$-\frac{2}{\pi} x\, t \leq -x\, sin(t) \leq -x\, t$$

soit :

$$x\, t \ \leq x\, sin(t) \leq \frac{2}{\pi} x\, t$$

donc :

$$e^{x\, sin(t)} \leq e^{\frac{2}{\pi} x\, t}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\, sin(t)} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{2}{\pi} x\, t} dt = \left[\frac{\pi}{2\, x} e^{\frac{2}{\pi} x\, t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Soit :

$$\boxed{0 \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2\, x}\ (e^x - 1)}$$

Or :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\pi}{2\, x}\ (e^x - 1) = 0$$

D’après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

Soit $x > 0$ alors $\forall\, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{2}{\pi} x\, t \leq x\, sin(t) \leq x\, t$$

donc :

$$e^{\frac{2}{\pi} x\, t} \leq e^{x\, sin(t)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{2}{\pi} x\, t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\, sin(t)} dt$$

D’où :

$$\boxed{\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\leq g(x)}$$

De plus :

$$\boxed{\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^x-1}{x^2}\right)\leq \frac{g(x)}{x}}$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^x-1}{x^2}\right)=+\infty$$

D’après le théorème de comparaison pour la limite :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=+\infty}$$

d) Déjà fait

e) Nous avons vu que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il est à noter pour les mêmes raisons invoquées au 1) que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g''(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(t)\,e^{x\,sint(t)}\,dt>0$$

g est donc convexe. La tangente en 0 a pour équation :

$$y=g'(0)x+g(0)$$

avec :

$$g'(0)=1$$

$$g(0)=\frac{\pi}{2}$$

d’où :

$$y=x+\frac{\pi}{2}$$

2)

a)

Par une récurrence triviale, il est facile de montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ à tout ordre et que :

$$g^{(n)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)\, e^{x\, sin(t)} dt$$

Ainsi sur tout intervalle de la forme $]-\infty; a[$

$$\left|g^{(n)}(x)\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |sin^n(t)|\, e^{x\, sin(t)} dt \leq g(x) \leq g(a)$$

g est donc somme de sa série de Taylor soit :

$$\boxed{g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)\, dt}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}\, x^n}$$

Autre méthode sans utiliser le fait que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ à tout ordre :

Posons pour x réel fixé :

$$\varphi_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\left(x\, sin(t)\right)^n}{n!}$$

Cette suite de fonctions tend simplement sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction :

$$\varphi(t) = e^{x\, sin(t)}$$

Or sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$|\varphi(t) - \varphi_N(t)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|x\, sin(t)|^n}{n!} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}$$

La convergence est donc uniforme sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_N(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\, dt$$

Soit :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x\, sin(t)\right)^n}{n!}\, dt = g(x)$$

d'où :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(sin(t)\right)^n dt}{n!} x^n$$

b)

g étant dérivable à tout ordre est C_∞ donc en particulier de classe C_2. Et sur $\mathbb{R}$:

$$x\, g''(x) + g'(x) - x\, g(x)$$

$$= x \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(t)\, e^{x\, sint(t)}\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\, e^{x\, sint(t)}\, dt - x \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\, sint(t)}\, dt$$

$$= x \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^2(t) - 1)\, e^{x\, sint(t)}\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\, e^{x\, sint(t)}\, dt$$

$$= -x \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t)\, e^{x\, sint(t)}\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\, e^{x\, sint(t)}\, dt$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(t) \left(x\, cos(t)\, e^{x\, sint(t)}\right) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\, e^{x\, sint(t)}\, dt$$

$$= - \left(\left[cos(t)\, e^{x\, sint(t)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\, e^{x\, sint(t)}\, dt \right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\, e^{x\, sint(t)}\, dt$$

$$= 1$$

Donc g est solution sur $\mathbb{R}$ de :

$$x\, y'' + y' - x\, y = 1$$

c) On a sur $\mathbb{R}$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}\, x^n$$

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\, I_n}{n!}\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-1)!}\, x^{n-1}$$

$$g''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)\, I_n}{(n-1)!}\, x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-2)!}\, x^{n-2}$$

Or :

$$x\, g''(x) + g'(x) - x\, g(x) = 1$$

Donc :

$$x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-2)!}\, x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-1)!}\, x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}\, x^n = 1$$

=

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-2)!}\, x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-1)!}\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}\, x^{n+1} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+1}}{(n-1)!}\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_{n+1}}{n!}\, x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!}\, x^n = 1$$

On en déduit :

$$\boxed{I_1 = 1}$$

Et pout tout $n \geq 2$:

$$\frac{I_{n+1}}{(n-1)!} + \frac{I_{n+1}}{n!} - \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} = 0$$

Soit :

$$n\, I_{n+1} + I_{n+1} = n\ \, I_{n-1}$$

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{n}{n+1}\ \, I_{n-1}}$$

A noter que cette formule reste valable pour $n = 1$. Elle définit les termes de rang pair et ceux de rang impair sachant :

$$\boxed{I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}}$$

d)

Reprenant la démarche précédente, les solutions DSE sont les solutions dont les coefficients notés a_n vérifient en posant :

$$a_n = \frac{I'_n}{n!}$$

Les relations

$$\boxed{I'_1 = 1}$$

et pour $n \geq 1$:

$$\boxed{I'_{n+1} = \frac{n}{n+1}\ I'_{n-1}}$$

La suite (I'_n) vérifie donc la même relation de récurrence que la suite (I_n) et comme $I'_1 = I_1 = 1$, les termes de rang impair des deux suites sont les mêmes et pour ceux de rang impair, en notant que :

$$I'_0 = \left(\frac{2}{\pi}\ I'_0\right)\ I_0$$

sont définis par :

$$I'_n = \left(\frac{2}{\pi}\ I'_0\right)\ I_n$$

les solutions DSE sont donc les fonctions de la forme :

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_{2p+1}}{(2p+1)!}\ x^{2p+1} + \left(\frac{2}{\pi}\ I'_0\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_{2p}}{(2p)!}\ x^{2p}$$

où I'_0 est un réel arbitraire, donc de la forme :

$$\boxed{h(x) = g(x) + k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_{2p}}{(2p)!}\ x^{2p}}$$

où k est un réel arbitraire

3) Sur $]-\infty; 1]$ on a :

$$x\ t\ \leq x\ sin(t)$$

donc :

$$e^{x\ t}\ \leq e^{x\ sin(t)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\ t}\ dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\ sin(t)} dt$$

$$\left[\frac{e^{x\ t}}{x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \leq g(x)$$

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}x} - 1}{x} \leq g(x)$$

Soit pour $a < 1$

$$\int_a^1 \frac{e^{\frac{\pi}{2}x} - 1}{x}\, dx \leq \int_a^1 g(x)\, dx$$

Or en $-\infty$:

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}x} - 1}{x} \sim -\frac{1}{x}$$

donc

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^1 \frac{e^{\frac{\pi}{2}x} - 1}{x}\, dx = +\infty$$

d'où par comparaison :

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^1 g(x)\, dx = +\infty$$

Donc g n'est pas intégrable sur $]-\infty; 0]$