Enoncé : Fonction Zeta de Riemann

On considère la fonction :

$$\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$$

1) Donner le domaine de définition de cette fonction

2) Montrer que ζ est de classe c^∞ sur son domaine de définition et donner une expression de sa dérivée p -ième pour tout entier naturel $p \geq 1$

3) Déterminer les variations de ζ ainsi que les limites aux bornes de son domaine de définition puis donner un équivalent de ζ à la borne inférieure de son domaine.

4) Donner un équivalent de $\zeta(x) - L$ en $+\infty$, L étant la limite de ζ en $+\infty$

5) Montrer que la série de terme général $\zeta(n) - L$ converge et calculer :

$$\sum_{k \geq 2} (\zeta(k) - 1)$$

Correction :

1) $D_\zeta =]1, +\infty[$

2) On pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

Ces fonctions sont dérivables à tout ordre sur $]1, +\infty[$ et pour tout entier naturel $p \geq 1$:

$$f_n^{(p)}(x) = \frac{(-\ln(n))^p}{n^x}$$

Elles vérifient donc pour tout réel $a > 1$, sur $]a, +\infty[$:

$$|f_n^{(p)}(x)| \leq \frac{(\ln(n))^p}{n^a}$$

La règle de Riemann montre que la série majorante est convergente. On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}(x)$ est normalement convergente donc uniformément convergente sur $]a, +\infty[$ donc que ζ est de classe c^∞ sur $]a, +\infty[$ donc sur $]1, +\infty[$ et que :

$$\zeta^{(p)}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-\ln(n))^p}{n^x}$$

3) Variations :

$$\zeta'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{-\ln(n)}{n^x} < 0$$

Donc ζ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$

Limite en 1 :

Par comparaison intégrale :

$$\zeta(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{x-1}$$

Par comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty$$

Limite en $+\infty$:

Toujours par comparaison intégrale :

$$1 \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = 1 + \frac{1}{x-1}$$

Par comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$$

Equivalent en 1 :

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

Donc, en 1 :

$$\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$$

4) On a sur $]1, +\infty[$ d'une part :

$$\frac{1}{2^x} \leq \zeta(x) - 1$$

D'autre part :

$$\zeta(x) - 1 = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{2^x} \sum_{n \geq 2} \frac{2^x}{n^x} = \frac{1}{2^x} \left(1 + 2^x \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n^x} \right)$$

Donc :

$$\zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{2^x} \left(1 + 2^x \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt \right) = \frac{1}{2^x} \left(1 + 2^x \times \frac{1}{(x-1) 2^{x-1}} \right) = \frac{1}{2^x} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)$$

Par comparaison, on en déduit en $+\infty$:

$$\zeta(x) - 1 \sim \frac{1}{2^x}$$

5)

$$\zeta(n) - 1 \sim \frac{1}{2^n}$$

Donc la série de terme général $\zeta(n) - 1$ converge.

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 2} (\zeta(k) - 1) &= \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^k} = \sum_{n \geq 2} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{n^k} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \\ &= \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 \end{aligned}$$