Enoncé

1) Construire une suite de fonctions $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur l' intervalle $[0,1]$ convergeant simplement mais non uniformément vers la fonction identiquement nulle dans chacun des cas suivants

1er cas :

$$sup_{[0,1]}(|f_n(x)|) = 1$$

2ème cas :

$$\lim_{n \to +\infty} sup_{[0,1]}(|f_n(x)|) = +\infty$$

On donnera un exemple pour chaque cas avec :

- Chaque fonction de la suite non continue sur $[0,1]$
- Chaque fonction de la suite continue mais non dérivable sur $[0,1]$

2) On considère la suite de fonctions $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur l' intervalle $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = e^{-n^4 \left(x - \frac{1}{n}\right)^2}$$

a) Montrer que cette suite de fonctions tend simplement sur $[0,1]$ vers la fonction identiquement nulle mais pas uniformément.

b) Soit la suite de terme général :

$$a_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

Montrer que la série de terme général a_n converge et donner sa valeur.

c) On modifie légèrement la suite de fonctions précédente en la multipliant par un facteur

$$f_n(x) = b_n\, e^{-n^4 \left(x - \frac{1}{n}\right)^2}$$

Donner un exemple de facteur b_n tel que la suite a_n telle que définie en b) converge mais que la série associée diverge et que la suite de fonction ne converge pas uniformément sur $[0,1]$

Solution :

1)

1er cas :

- Chaque fonction de la suite non continue sur $[0,1]$

$$f_0(1) = 1 \ , pour\ x \neq 1 \ \ f_0(x) = 0$$

$$pour\ n \geq 1 : \ \ f_n(x) = 1\ sur\ \left[\frac{1}{2\,n}, \frac{1}{n}\right] , 0\ sinon$$

- Chaque fonction de la suite continue mais non dérivable sur $[0,1]$

$$f_0(1) = 1 \ , pour\ x \neq 1 \ \ f_0(x) = 0$$

$$pour\ n \geq 1 : \ \ f_n(x) = 2 - 2\,n\,x\ sur\ \left[\frac{1}{2\,n}, \frac{1}{n}\right] , 2\,n\,x\ sur\ \left[0, \frac{1}{2\,n}\right] , 0\ sinon$$

2ème cas :

- Chaque fonction de la suite non continue sur $[0,1]$

$$f_0(1) = 1 \ , pour\ x \neq 1 \ \ f_0(x) = 0$$

$$pour\ n \geq 1 : \ \ f_n(x) = n\ sur\ \left[\frac{1}{2\,n}, \frac{1}{n}\right] , 0\ sinon$$

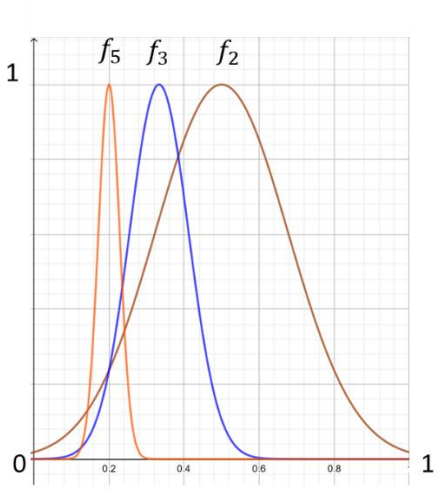
- Chaque fonction de la suite continue mais non dérivable sur $[0,1]$

$$f_0(1) = 1 \ , pour\ x \neq 1 \ \ f_0(x) = 0$$

$$pour\ n \geq 1 : \ \ f_n(x) = 2\,n - 2\,n^2\,x\ sur\ \left[\frac{1}{2\,n}, \frac{1}{n}\right] , 2\,n^2\,x\ sur\ \left[0, \frac{1}{2\,n}\right] , 0\ sinon$$

2)

a)



si $x \neq 0$:

$$-n^4 \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 \sim -n^4 x^2$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} -n^4 \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 = -\infty$$

Et :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n^4\left(x-\frac{1}{n}\right)^2} = 0$$

si $x = 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n^4\left(-\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n^2} = 0$$

La suite de fonction tend donc simplement vers la fonction identiquement nulle. Cependant :

$$sup_{[0,1]}(|f_n(x)|) = 1$$

qui ne tend pas vers 0, donc la convergence n'est pas uniforme.

b)

Procédons au changement de variable :

$$t = n^2 \left(x - \frac{1}{n}\right), \qquad dt = n^2\, dx$$

alors

$$a_n = \frac{1}{n^2}\int_{-n}^{n\,(n-1)} e^{-t^2}\,dt$$

Or l'intégrale impropre associée à la fonction e^{-t^2} est convergente en $+\infty$ et en $-\infty$, de valeur $\sqrt{\pi}$ donc :

$$a_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{n^2}$$

Ainsi la suite de terme général a_n tend vers 0 et la série associée converge

c) Il suffit de prendre :

$$b_n = n$$

Car alors :

$$a_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{n}$$

Et la suite de fonctions converge encore simplement vers la fonction identiquement nulle mais :

$$sup_{[0,1]}(|f_n(x)|) = \sqrt{n}$$

Donc elle ne converge pas uniformément.