Enoncé :

Soit une suite de fonctions $(f_n(x))_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On rappelle que cette suite tend simplement vers la fonction f sur I si :

$$\forall\, x \in I : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

Soit :

$$\forall\, x \in I\,, \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

et on dit qu'elle converge uniformément vers f sur I si :

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \;\Rightarrow\; \forall\, x \in I : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (1)$$

A noter une formulation équivalente :

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \;\Rightarrow\; sup_I(|f_n(x) - f(x)|) < \varepsilon \qquad (2)$$

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} sup_I(|f_n(x) - f(x)|) = 0 \qquad (3)$$

1) Montrer que la formulation (3) précédente équivaut à la suivante :

$$\exists\, (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \;:\; sup_I(|f_n(x) - f(x)|) \le a_n \qquad , \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

2) Soit une suite de fonctions $(f_n(x))_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que la série de fonction associée $(\sum_{k=0}^{n} f_k(x))_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ converge simplement sur I. Montrer que la série converge uniformément sur I si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$\exists\, (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \;:\; sup_I\left(\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|\right) \le a_n \qquad , \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Rappelons que la quantité $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ est qualifiée de reste de rang n. La condition précédente traduit que ce reste peut être majoré en valeur absolue par une suite indépendamment de la variable x.

En déduire qu'une condition suffisante pour que la série converge uniformément sur I est le critère dit de convergence normale :

$$\exists\, (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \;:\; \forall\, x \in I : \; |f_n(x)| \;\le a_n, \; \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ converge}$$

3) Application aux séries entières :

Soit une série entière $\sum a_n\, x^n$ de rayon de convergence fini $R \le 1$ et telle que :

$$(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\; décroissante \;\; \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Montrer que la série est uniformément convergente sur $[-R, 0]$ et en déduire que la fonction somme $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k$ est continue sur $[-R, R[$.

4) Déterminer la valeur de la somme suivante, après avoir justifié sa convergence :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k + 1}$$

Corrigé :

1)Le sens $\Rightarrow$ est trivial en posant :

$$a_n = sup_I(|f_n(x) - f(x)|)$$

Le sens réciproque est lui aussi trivial :

2) Notons :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x), \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

Alors :

$$sup_I(|S_n(x) - S(x)|) = sup_I\left(\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|\right)$$

Il suffit ensuite d'appliquer le critère du 1)

Pour la condition suffisante, il suffit de noter que :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

Et compte tenu de la convergence de la série de terme général a_n :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = 0$$

3) Soit $x \in [-R, 0]$ posons : $r = -x \in [0, R] \subset [0,1]$ alors :

$$a_n\, x^n = (-1)^n a_n\, r^n$$

Et :

$$a_{n+1}\, r^{n+1} - a_n\, r^n = r^n\big((a_{n+1} - a_n)\, r + a_n\,(r-1)\big) \leq 0$$

Donc la série de terme général $a_n\, x^n$ est alternée. On peut donc majorer son reste de rang n en valeur absolue ainsi :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n\, x^n\right| \leq |a_{n+1}\, x^{n+1}| = |a_{n+1}|\, |x|^{n+1} \leq a_{n+1}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$$

La série converge donc uniformément sur $[-R, 0]$. Comme chacune des fonctions $a_n\, x^n$ est continue sur $[-R, 0]$ la somme de la série est continue sur $[-R, 0]$. On sait de plus de façon générale, que la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur tout sous intervalle $]-R, R[$, on en déduit que la somme de notre série est continue sur $[-R, R[$

4) On a sur $]-1,1[$:

$$\left(Arctan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2\,k}$$

Soit :

$$Arctan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k+1} x^{2\,k+1}$$

Or la série entière de terme général $\frac{(-1)^n}{2\,n+1} x^{2\,n+1}$ est une série alternée donc convergente et son reste de rang n peut être majoré ainsi sur $[0,1]$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k+1} x^{2\,k+1}\right| \leq \left|\frac{(-1)^{n+1}}{2\,(n+1)+1} x^{2\,(n+1+1}\right| \leq \frac{1}{2\,n+3}$$

Où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\,n+3} = 0$$

La convergence est donc uniforme sur $[0,1]$, la somme de la série est donc continue sur $[0,1]$. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k+1} = \lim_{x\to1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k+1} x^{2\,k+1} = \lim_{x\to1^-} Arctan(x) = Arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$