Trigonalisation d'une matrice 3x3

On note $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique de A et en déduire qu'il est scindé avec une racine simple λ donc que A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$
2) En déduire une matrice nilpotente N telle que $A = \lambda\, I + N$
3) Calculer les puissances successives de N et en déduire l'indice de nilpotence de N
4) De façon générale, pour une matrice nilpotente d'ordre n d'indice de nilpotence p, montrer qu'il existe un vecteur X_0 de $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ tel que la famille $(N^{p-1}X_0, N^{p-2}X_0, \dots N\, X_0, X_0)$ soit libre et en déduire que $p \leq n$
5) En déduire une base de $\mathbb{E}$ dans laquelle l'endomorphisme de $\mathbb{E}$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{E}$ est triangulaire supérieure et déterminer la matrice de passage P de la base canonique à cette base.
6) En déduire que $T = P^{-1}\, A\, P$ est une matrice triangulaire supérieure que l'on précisera

Correction :

1) On a :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} (-2-X) & -1 & 2 \\ -15 & (-6-X) & 11 \\ -14 & -6 & (11-X) \end{vmatrix}$$

$$= (-2-X)\left((-6-X)(11-X)+66\right) + 15\,(-(11-X)+12) - 14\left(-11-2\,(-6-X)\right)$$

$$= (-2-X)\,(-5\,X + X^2) + 15 + 15\,X - 14 - 28\,X$$

$$= -X^3 + 3\,X^2 - 3\,X + 1 = (1-X)^3$$

2) Le polynôme caractéristique de A étant scindé, A est trigonalisable donc semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Ainsi $N = A - I$ est une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale donc nilpotente.
3) On a :

$$N = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -15 & -7 & 11 \\ -14 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -4 & -2 & 3 \\ -8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = 0$$

Donc N a pour indice de nilpotence 3

4) On a $N^{p-1} \neq 0$ donc il existe X_0 tel que $N^{p-1}X_0 \neq 0$. Posons alors :

$$a_{p-1}\, N^{p-1}X_0 + a_{p-2}N^{p-2}X_0 + \cdots + a_1 N\, X_0 + a_0\, X_0 = 0$$

En multipliant par N^{p-1} puis N^{p-2} ,puis …N on en déduit successivement :

$$a_0 \; = 0, a_1 = 0, \dots, a_{p-1} = 0$$

Donc la famille $(N^{p-1}X_0, N^{p-2}X_0, \dots N\, X_0, X_0)$ est libre dans $\mathbb{E}$ qui est de dimension n. Donc :

$$p \leq n$$

5) Prenons pour X_0 un vecteur simple tel que $N^2X_0 \neq 0$ par exemple :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors $(N^2X_0, N\, X_0, X_0)$ est une base de $\mathbb{E}$ dont les colonnes forment la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -4 & -15 & 0 \\ -8 & -14 & 0 \end{pmatrix}$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{cases} N\, N^2X_0 = 0 = 0\, N^2X_0 + 0\, NX_0 + 0\, X_0 \\ N\, NX_0 = 1\, N^2X_0 + 0\, NX_0 + 0\, X_0 \\ NX_0 = 0\, N^2X_0 + 1\, NX_0 + 0\, X_0 \end{cases}$$

Posons :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

T_1 est la matrice dans la base $(N^2X_0, N\, X_0, X_0)$ de l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est N. Ainsi :

$$P^{-1}\, N\, P = T_1$$

On en déduit :

$$P^{-1}\, A\, P = P^{-1}\, (N + I)\, P = P^{-1}\, N\, P + P^{-1}\, P = T_1 + I = T$$

Avec :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$