Enoncé :

1) Montrer, en précisant le domaine de validité, que :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)}$$

2) En déduire une expression de $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$ en précisant le domaine de validité

3) Montrer que :

$$\operatorname{Atan}(x) + \operatorname{Atan}\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon \frac{\pi}{2}$$

Où $\varepsilon = 1$ sur $]0, +\infty[$, -1 sur $] -\infty, 0[$

4) On considère les fonctions :

$$f(x) = \operatorname{Atan}(x), \quad g(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Atan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

Montrer de deux façons différentes, que :

$$f(x) = g(x) \text{ sur }]-1, 1[$$

$$f(x) = g(x) + \frac{\pi}{2} \text{ sur }]1, +\infty[$$

$$f(x) = g(x) - \frac{\pi}{2} \text{ sur }]-\infty, -1[$$

On en déduit ainsi que sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$: $f'(x) = g'(x)$

5) Application : On considère la fonction :

$$h(x) = \operatorname{Atan}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$$

Montrer que :

$$h'(x) = -\frac{1}{2} f'(x)$$

et en déduire $h'(x)$.

Retrouver ce résultat par dérivation composée.

Correction

1)

$$\tan(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)}{\cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)}$$

$$\frac{\frac{\sin(a) \cos(b)}{\cos(a) \cos(b)} + \frac{\cos(a) \sin(b)}{\cos(a) \cos(b)}}{\frac{\cos(a) \cos(b)}{\cos(a) \cos(b)} - \frac{\sin(a) \sin(b)}{\cos(a) \cos(b)}} = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)}$$

Valable pour (a, b) tels que $a \notin \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z}, b \notin \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z}, a + b \notin \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z}$

2)

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

Valable pour $x \notin \frac{\pi}{4} + \pi \mathbb{Z}$

3) Posons pour $x \in \mathbb{R}$:

$$k(x) = \operatorname{Atan}(x) + \operatorname{Atan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Alors :

$$k'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

Donc sur $]0, +\infty[$:

$$\operatorname{Atan}(x) + \operatorname{Atan}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = \frac{\pi}{2}$$

Et sur $]-\infty, 0[$:

$$\operatorname{Atan}(x) + \operatorname{Atan}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = -\frac{\pi}{2}$$

4)

Pour $x \in]-1, 1[$: $f(x) \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ et :

$$\tan(2f(x)) = \frac{2 \tan(f(x))}{1 - \tan^2(f(x))} = \frac{2x}{1-x^2}$$

Or :

$$2f(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

Donc :

$$2f(x) = \operatorname{Atan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

Soit :

$$f(x) = g(x)$$

Pour $x \in]1, +\infty[: f(x) \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[:$

$$\tan(2f(x)) = \frac{2x}{1-x^2}$$

Mais :

$$2f(x) \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$$

Donc :

$$2f(x) - \pi \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

et

$$\tan(2f(x) - \pi) = \frac{2x}{1-x^2}$$

Soit :

$$2f(x) - \pi = \operatorname{Atan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

Donc :

$$f(x) = g(x) + \frac{\pi}{2}$$

Un raisonnement analogue se fait sur $]-\infty, -1[$

Autre méthode :

Sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ f et g sont dérivables et :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)'}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2}}{\frac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2}} = \frac{1}{2} \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} = f'(x)$$

Donc sur $]-1, 1[:$

$$f(x) = g(x) + C$$

C étant une constante déterminée par la valeur en 0 qui est nulle donc $C = 0$

Sur $]1, +\infty[:$

$$f(x) = g(x) + D$$

D étant une constante déterminée en passant à la limite en $1+$ ce qui donne

$$\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + D$$

Soit :

$$D = \frac{\pi}{2}$$

Même travail sur $]-\infty, -1[$

5) Notons d'abord que :

$$\begin{aligned} (\sqrt{1+x^2} - x)^2 = 1 &\Leftrightarrow 1 + x^2 - 2x\sqrt{1+x^2} + x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x(x - \sqrt{1+x^2}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Donc pour $x \neq 0$, $\sqrt{1+x^2} - x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

On introduit ensuite, pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} l(x) &= \frac{1}{2} \operatorname{Atan} \left(\frac{2(\sqrt{1+x^2} - x)}{1 - (\sqrt{1+x^2} - x)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Atan} \left(\frac{2(\sqrt{1+x^2} - x)}{1 - (1 + x^2 - 2x\sqrt{1+x^2} + x^2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Atan} \left(\frac{2(\sqrt{1+x^2} - x)}{2x(-x + \sqrt{1+x^2})} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Atan} \left(\frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

et $h(x)$ et $l(x)$ diffèrent d'une constante sur $]-\infty, -1[,]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$.

On a donc sur $\mathbb{R}^*$:

$$h'(x) = l'(x) = \left(\frac{1}{2} \operatorname{Atan} \left(\frac{1}{x} \right) \right)' = \left(-\frac{1}{2} \operatorname{Atan}(x) \right)' = -\frac{1}{2(1+x^2)}$$

La formule restant valable en 0 par passage à la limite car h est de continument dérivable sur $\mathbb{R}$.

Autre méthode :

On dérive par composée :

$$h(x) = \operatorname{Atan}(\sqrt{1+x^2} - x)$$

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)'}{1 + (\sqrt{1+x^2} - x)^2} \\
&= \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1}{1 + 1 + x^2 - 2x\sqrt{1+x^2} + x^2} \\
&= \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}(1+x^2 - x\sqrt{1+x^2})} \\
&= \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2} - x)} \\
&= -\frac{1}{2(1+x^2)}
\end{aligned}$$