Exercice 1 : Etablir la propriété :

$$\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 :\ Tan(a + b) = \frac{Tan(a) + Tan(b)}{1 - Tan(a)Tan(b)}$$

En déduire une formule pour :

$$Tan(a - b)$$

Puis pour :

$$Tan(a + b + c)$$

Exercice 2

Rappeler pour quelles valeurs de x la fonction $Tan(x)$ est définie. Pour ces valeurs, montrer que l'on a :

$$cos^2(x) = \frac{1}{1 + Tan^2(x)}$$

Exercice 3 : On pose :

$$t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Pour quelles valeurs de x le nombre t est il défini ?

Montrer que pour ces valeurs de x, on a :

$$cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$sin(x) = \frac{2\,t}{1 + t^2}$$

$$tan(x) = \frac{2\,t}{1 - t^2}$$

En déduire une expression de $tan(x)$ en fonction de $tan(2\,x)$ pour $x \in \,]0; \pi/2[$

Solutions :

<u>Exercice 1</u> :

$$Tan(a+b)=\frac{sin(a+b)}{cos(a+b)}=\frac{sin(a)\,cos(b)+cos(a)\,sin(b)}{cos(a)\,cos(b)-sin(a)\,sin(b)}$$

$$=\frac{\frac{sin(a)\,cos(b)+cos(a)\,sin(b)}{cos(a)\,cos(b)}}{\frac{cos(a)\,cos(b)-sin(a)\,sin(b)}{cos(a)\,cos(b)}}$$

$$=\frac{\frac{sin(a)\,cos(b)}{cos(a)\,cos(b)}+\frac{cos(a)\,sin(b)}{cos(a)\,cos(b)}}{\frac{cos(a)\,cos(b)}{cos(a)\,cos(b)}-\frac{sin(a)\,sin(b)}{cos(a)\,cos(b)}}$$

$$=\frac{\frac{sin(a)}{cos(a)}+\frac{sin(b)}{cos(b)}}{1-\frac{sin(a)\,sin(b)}{cos(a)\,cos(b)}}$$

$$=\frac{Tan(a)+Tan(b)}{1-Tan(a)Tan(b)}$$

On en déduit en remplaçant b par – b dans la formule :

$$Tan(a-b)=Tan\big(a+(-b)\big)=\frac{Tan(a)+Tan(-b)}{1-Tan(a)Tan(-b)}$$

$$=\frac{Tan(a)-Tan(b)}{1+Tan(a)Tan(b)}$$

Puis :

$$Tan(a+b+c)=Tan\big((a+b)+c\big)$$

$$=\frac{Tan(a+b)+Tan(c)}{1-Tan(a+b)Tan(c)}$$

$$=\frac{\frac{Tan(a)+Tan(b)}{1-Tan(a)Tan(b)}+Tan(c)}{1-\frac{Tan(a)+Tan(b)}{1-Tan(a)Tan(b)}Tan(c)}$$

$$=\frac{Tan(a)+Tan(b)+Tan(c)\,\big(1-Tan(a)Tan(b)\big)}{\big(1-Tan(a)Tan(b)\big)-\big(Tan(a)+Tan(b)\big)\,Tan(c)}$$

$$= \frac{Tan(a) + Tan(b) + Tan(c) - Tan(a)\, Tan(b)\, Tan(c)}{1 - Tan(a)Tan(b) - Tan(a)Tan(c) - Tan(b)Tan(c)}$$

Exercice 2

La condition de définition de t est :

$$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \ , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Soit :

$$x \neq (2\,k + 1)\,\pi$$

On a alors :

$$cos(x) = cos\left(2\,\frac{x}{2}\right) = 2\ cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$= \frac{2}{1 + Tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1$$

$$= \frac{2}{1 + t^2} - 1$$

$$= \frac{2}{1 + t^2} - \frac{1 + t^2}{1 + t^2}$$

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$sin(x) = sin\left(2\,\frac{x}{2}\right) = 2\ sin\left(\frac{x}{2}\right)\ cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\ \frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{cos\left(\frac{x}{2}\right)}\ cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\ Tan\left(\frac{x}{2}\right)\ \frac{1}{1 + Tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\,t}{1 + t^2}$$

$$tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} = \frac{2\,t}{1 + t^2} \times \frac{1 + t^2}{1 - t^2} = \frac{2\,t}{1 - t^2}$$

Ainsi, pour $x \in]0;\pi/2[$:

$$tan(2\,x) = \frac{2\ tan(x)}{1 - tan^2(x)}$$

$$tan(2\,x)\,(1 - tan^2(x)) = 2\ tan(x)$$

$$tan(2\,x)\ tan^2(x) + 2\ tan(x) - tan(2\,x) = 0$$

Posons $tan(x) = t$ et résolvons en la variable t l'équation :

$$tan(2\,x)\ t^2 + 2\,t - tan(2\,x) = 0$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 4 + 4\ tan^2(2\,x) > 0$$

Le produit des racines valant -1 elles sont de signe contraire. $tan(x)$ est donc la racine positive, soit :

$$tan(x) = \frac{-2 + \sqrt{4 + 4\ tan^2(2\,x)}}{2\ tan(2\,x)}$$

Soit finalement :

$$\boxed{tan(x) = \frac{\sqrt{1 + tan^2(2\,x)} - 1}{tan(2\,x)}}$$

A noter qu'une autre formule peut être obtenue à partir de celles du sinus et du cosinus qui sont pour $x \in]0;\pi/2[$, rappelons le :

$$sin(x) = \sqrt{\frac{1 - cos(2\,x)}{2}}$$

$$cos(x) = \sqrt{\frac{1 + cos(2\,x)}{2}}$$

Elles conduisent à :

$$\boxed{tan(x) = \sqrt{\frac{1 - cos(2\,x)}{1 + cos(2\,x)}}}$$