Exercice 1 :

1) Etablir la propriété :

$$\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 :\ sin(a) + sin(b) = 2\, sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\, cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

2) En déduire une formule, pour tout entier naturel n et tout réel x pour :

$$sin\big((n+2)\,x\big) + sin(n\,x)$$

3) Montrer que pour tout entier naturel n il existe un polynôme P_n de degré n tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : sin\big((n+1)x\big) = sin(x)\ \ P_n(cos(x))$$

Conseil : on pourra procéder par une récurrence forte

4) En déduire une relation de récurrence caractérisant la suite de polynôme P_n et déterminer le coefficient de terme de plus haut degré de P_n
5) Déterminer P_0, P_1, P_2, P_3, P_4
6) Montrer qu'il ne peut y avoir qu'un seul polynôme P vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : sin\big((n+1)x\big) = sin(x)\ \ P(cos(x)$$

7) Retrouver directement P_3 par duplications successives de $sin(4\,x)$

Exercice 2 :

1) Etablir la propriété :

$$\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 :\ cos(a) + cos(b) = 2\, cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\, cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

2) En déduire une formule, pour tout entier naturel n et tout réel x pour :

$$cos\big((n+2)\,x\big) + \cos(n\,x)$$

3) Montrer que pour tout entier naturel n il existe un polynôme P_n de degré n tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : cos(n\,x) =\ P_n(\cos(x))$$

Conseil : on pourra procéder par une récurrence forte

4) En déduire une relation de récurrence caractérisant la suite de polynôme P_n et déterminer le coefficient de terme de plus haut degré de P_n
5) Déterminer P_0, P_1, P_2, P_3, P_4
6) Montrer qu'il ne peut y avoir qu'un seul polynôme P vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : cos(n\,x) =\ P(\cos(x))$$

Corrections :

<u>Exercice 1</u> :

1) Il s'agit d'utiliser les formules de duplication. Ainsi, on cherche l'unique couple (x, y) de réels tels que :

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

Soit, par somme et différence :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

Ainsi :

$$sin(a) + sin(b) = sin(x+y) + sin(x-y)$$

$$= sin(x)\,cos(y) + cos(x)\,sin(y) + sin(x)\,cos(y) - cos(x)\,sin\,(y)$$

$$= 2\ sin(x)\,cos(y)$$

$$= 2\,sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\ cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

2) On en déduit pour $a = (n+2)\,x$, $b = n\,x$:

$$sin\big((n+2)\,x\big) + sin(n\,x) = 2\,sin\left(\frac{(n+2)\,x\ \ + n\,x}{2}\right)\,cos\left(\frac{(n+2)\,x\ \ - n\,x}{2}\right)$$

soit :

$$\boxed{sin\big((n+2)\,x\big) + sin(n\,x) = 2\ sin\big((n+1)\,x\big)\ cos\,(x)}$$

3) Considérons le prédicat posé en la variable n :

$Q_n =$ il existe un polynôme P_n de degré n tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : sin\big((n+1)x\big) = sin(x)\ P_n(cos(x))$$

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$ et $n = 1$:

On a :

$\forall\, x \in \mathbb{R} : sin\big((0+1)x\big) = sin(x) = sin(x)\ P_0(cos(x))$ en posant $P_0(t) = 1$

$\forall\, x \in \mathbb{R} : sin\big((1+1)x\big) = 2\ \ sin(x)\, cos(x) = sin(x)\, P_1(cos(x))$ en posant $P_1(t) = 2\, t$

Donc Q_0 et Q_1 sont vraies

<u>Hérédité</u> : Soit un entier $n \geq 1$ tel que pour entier naturel $0 \leq k \leq n\ \ Q_k$ soit vraie, alors on a, d'après la propriété précédente :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : sin\big((n+2)x\big) = 2\ \ sin\big((n+1)\ x\big)\, co\, s(x) - sin(n\, x)$$

$$= 2\ \ sin(x)\ \ P_n(cos(x))\ co\, s(x) - sin(x)\ \ P_{n-1}(cos(x))$$

$$=\ sin(x)\ \big(2\ co\, s(x)\ \ \ P_n(cos(x)) -\ P_{n-1}(cos(x))\big)$$

Posons alors pour tout réel t :

$$P_{n+1}(t) = 2\ t\ P_n(t) -\ P_{n-1}(t)$$

alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : sin\big((n+2)x\big) = sin(x)\ \ P_{n+1}(cos(x))$$

et :

$$d^{\circ}(P_{n+1}(t)) = d^{\circ}\big(2\ t\ P_n(t)\big) = n+1$$

Donc Q_{n+1}

La propriété Q_n est donc vraie pour tout entier naturel n

4) Une relation de récurrence est apparue dans la démonstration de l'hérédité. Décalons-la d'un indice. On a alors pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2}(t) = 2\ t\ P_{n+1}(t) -\ P_n(t)$$

avec :

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = 2\ t$$

La suite des coefficients a_n des termes de plus haut degré des polynômes P_n vérifie la relation de récurrence :

$$a_{n+1} = 2\ a_n$$

Avec :

$$a_0 = 1$$

On en déduit, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{a_n = 2^n}$$

5) Cela permet d'en déduire les polynômes $P_n(t)$ de proche en proche. Ainsi :

$$P_2(t) = 2\,t\,P_1(t) - P_0(t) = 4\,t^2 - 1$$

$$P_3(t) = 2\,t\,P_2(t) - P_1(t) = 2\,t\,(4\,t^2 - 1) - \,2\,t = 8\,t^3 - 4\,t$$

$$P_4(t) = 2\,t\,P_3(t) - P_2(t) = 2\,t\,(8\,t^3 - 4\,t) - \,(4\,t^2 - 1) = 16\,t^4 - 12\,t^2 + 1$$

6) Soient deux polynômes P et Q vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : sin(x)\;\; P(cos(x)) = sin(x)\;\; Q(cos(x))$$

Alors pour tout réel t de $]-1; 1[$, il existe un réel x tel que :

$$t = cos(x) \;\text{ et }\; sin(x) \neq 0$$

Donc :

$$\forall\, x \in\,]-1; 1[\, : P(t) = \; Q(t)$$

Les deux polynômes coïncident donc sur un même intervalle non réduit à un point. Ils ont donc le même degré et les mêmes coefficients.

7) On a pour tout réel x :

$$sin(4\,x) = sin(2\,x + 2\,x)$$

$$= 2\;\, sin(2\,x)\;\; cos(2\,x)$$

$$= 2\;\times 2\;\; sin(x)\;\; cos(x)\,(2\,cos^2(x) - 1)$$

$$= sin(x)\;\;(8\;\;cos^3(x) - 4\;\,cos(x))$$

Ainsi :

$$P_3(t) = 8\,t^3 - 4\,t$$

Exercice 2 :

Cet exercice se résout de façon analogue au précédent.

1) Il s'agit d'utiliser les formules de duplication. Ainsi, on cherche l'unique couple (x, y) de réels tels que :

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

Soit, par somme et différence :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

Ainsi :

$$cos(a) + cos(b) = cos(x + y) + cos(x - y)$$

$$= cos(x)\, cos(y) - sin(x)\, sin(y) + cos(x)\, cos(y) + sin(x)\, sin\,(y)$$

$$= 2\ cos(x)\, cos(y)$$

$$= 2\, cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\ cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

2) On en déduit pour $a = (n+2)\,x$, $b = n\,x$:

$$cos\big((n+2)\,x\big) + cos(n\,x) = 2\,cos\left(\frac{(n+2)\,x\ \ + n\,x}{2}\right)\ cos\left(\frac{(n+2)\,x\ \ - n\,x}{2}\right)$$

soit :

$$\boxed{cos\big((n+2)\,x\big) + cos(n\,x) = 2\ cos\big((n+1)\,x\big)\ cos\,(x)}$$

3) Considérons le prédicat posé en la variable n :

$Q_n =$ il existe un polynôme P_n de degré n tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : cos(n\,x) = \ P_n(cos(x))$$

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$ et $n = 1$:

On a :

$\forall x \in \mathbb{R} : cos(0\,x) = 1 = \; P_0(cos(x))$ en posant $P_0(t) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R} : cos(1\,x) = cos(x) = P_1(cos(x))$ en posant $P_1(t) = \; t$

Donc Q_0 et Q_1 sont vraies

<u>Hérédité</u> : Soit un entier $n \geq 1$ tel que pour entier naturel $0 \leq k \leq n \;\; Q_k$ soit vraie, alors on a, d'après la propriété précédente, décalée d'un indice :

$$\forall x \in \mathbb{R} : cos\big((n+1)x\big) = 2\; cos(n\,x)\, co\,s(x) - cos\big((n-1)\,x\big)$$

$$= 2\; P_n(cos(x))\, co\,s(x) - \; P_{n-1}(cos(x))$$

Posons alors pour tout réel t :

$$P_{n+1}(t) = 2\,t\,P_n(t) - \; P_{n-1}(t)$$

alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} : cos\big((n+1)x\big) = \; P_{n+1}(cos(x))$$

et :

$$d^\circ(P_{n+1}(t)) = d^\circ\big(2\,t\,P_n(t)\big) = n+1$$

Donc Q_{n+1}

La propriété Q_n est donc vraie pour tout entier naturel n

4) Une relation de récurrence est apparue dans la démonstration de l'hérédité. Décalons-la d'un indice. On a alors pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2}(t) = 2\,t\,P_{n+1}(t) - \; P_n(t)$$

avec :

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = \; t$$

La suite des coefficients a_n des termes de plus haut degré des polynômes P_n vérifie la relation de récurrence à partir du rang 1 :

$$a_{n+1} = 2\,a_n$$

Avec :

$$a_1 = 1$$

On en déduit, pour tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{a_n = 2^{n-1}}$$

5) Cela permet d'en déduire les polynômes $P_n(t)$ de proche en proche. Ainsi :

$$P_2(t) = 2\,t\,P_1(t) - P_0(t) = 2\,t^2 - 1$$

$$P_3(t) = 2\,t\,P_2(t) - P_1(t) = 2\,t\,(2\,t^2 - 1) - \;t = 4\,t^3 - 3\,t$$

$$P_4(t) = 2\,t\,P_3(t) - P_2(t) = 2\,t\,(4\,t^3 - 3\,t) - \;(2\,t^2 - 1) = 8\,t^4 - 8\,t^2 + 1$$

6) C'est le même traitement qu'à la question 6) de l'exercice 1