

**Enoncé :**

Montrer pour  $0 \leq p \leq n$  :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Visualiser cette propriété dans le triangle de Pascal

**Solution**

Faisons un raisonnement par récurrence sur  $n$ .

Initialisation : Pour  $n = 0$  c'est trivial

Hérédité : Soit  $n$  un entier naturel pour lequel la propriété est vraie alors pour tout entier  $p$  tel que :  $0 \leq p \leq n + 1$  on a :

ou bien :  $0 \leq p \leq n$  et :

$$\begin{aligned} \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{n+1}{p} &= \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{n}{p} + \binom{n+1}{p} \\ &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1} \end{aligned}$$

Ou bien :  $p = n + 1$  et :

$$\begin{aligned} \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{n+1}{p} &= \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} = 1 + n + 1 = n + 2 \\ &= \binom{n+2}{n+1} = \binom{n+2}{p+1} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour l'entier  $n + 1$  donc vraie pour tout entier naturel  $n$

Voyons comment cette propriété se visualise dans le triangle de Pascal pour un exemple,  $n = 8, p = 4$  soit :

$$\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \binom{9}{5}$$

qui se traduit par l'égalité de la somme des termes des cellules bleues avec la cellule rouge.

|    | 1  | 2  | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9  | 10 | 11 |
|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|
| 1  | 1  |    |     |     |     |     |     |     |    |    |    |
| 2  | 2  | 1  |     |     |     |     |     |     |    |    |    |
| 3  | 3  | 3  | 1   |     |     |     |     |     |    |    |    |
| 4  | 4  | 6  | 4   | 1   |     |     |     |     |    |    |    |
| 5  | 5  | 10 | 10  | 5   | 1   |     |     |     |    |    |    |
| 6  | 6  | 15 | 20  | 15  | 6   | 1   |     |     |    |    |    |
| 7  | 7  | 21 | 35  | 35  | 21  | 7   | 1   |     |    |    |    |
| 8  | 8  | 28 | 56  | 70  | 56  | 28  | 8   | 1   |    |    |    |
| 9  | 9  | 36 | 84  | 126 | 126 | 84  | 36  | 9   | 1  |    |    |
| 10 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45  | 10 | 1  |    |
| 11 | 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | 462 | 330 | 165 | 55 | 11 | 1  |