Séries à somme télescopique

Calculer, dans chacun des cas suivants, la somme partielle de la série de terme général U_n et , dans le cas où la série converge, calculer sa somme (à partir du rang où elle est définie)

$$a)\ U_n = \frac{1}{1+2+\cdots+n} \qquad b)\ U_n = Ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad c)\ U_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$d)\ U_n = \frac{1}{n^2-1} \qquad e)\ U_n = Ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \qquad f)\ U_n = \frac{1}{n^3-n}$$

<u>Correction</u> :

a)

$$U_n = \frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{n\,(n+1)}{2}} = \frac{2}{n\,(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} U_k = 2$$

b)

$$U_n = Ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = Ln(n+1) - Ln(n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n}(Ln(k+1) - Ln(k)) = Ln(n+1) - Ln(1) = Ln(n+1)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} U_k = +\infty$$

c)

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \sqrt{n+1} - \sqrt{0} = \sqrt{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} U_k = +\infty$$

d) Pa r décomposition en éléments simples

$$U_n = \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=2}^{n} U_k = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2-1} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} U_k = \frac{3}{4}$$

e)

$$U_n = Ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = Ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = Ln\left(\frac{(n-1)\,(n+1)}{n^2}\right) = Ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - Ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=2}^{n} U_k = \sum_{k=2}^{n}\left(Ln\left(\frac{k-1}{k}\right) - Ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right) = Ln\left(\frac{2-1}{2}\right) - Ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - Ln(2)$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} U_k = -Ln(2)$$

f)

$$U_n = \frac{1}{n^3-n} = \frac{1}{n\,(n-1)(n+1)}$$

$$\sum_{k=2}^{n} U_k = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\,(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{k\,(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2+k)-k}{k\,(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k\,(k+1)} - \frac{1}{(k+1)\,(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n\,(n+1)}\right)$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} U_k = \frac{1}{4}$$