Symétrie vectorielle plane

Enoncé :

L'espace étant muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les trois vecteurs suivants

$$\vec{I} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{J} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{K} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Soit p la projection vectorielle sur le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ parallèlement à la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{K}$ et s la symétrie vectorielle par rapport à ce même plan parallèlement à cette même droite.

- 1) Vérifier que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base de l'espace
- 2) Représenter les trois vecteurs $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ en perspective
- 3) Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de l'espace. Exprimer $s(\vec{u})$ en fonction de $\vec{u}$ et de $p(\vec{u})$

On décompose $\vec{u}$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ sous la forme :

$$\vec{u} = \alpha \vec{I} + \beta \vec{J} + \gamma \vec{K}$$

- 4) Exprimer $p(\vec{u})$ puis $s(\vec{u})$ dans la même base

On décompose $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sous la forme :

$$\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

- 5) Exprimer sous forme d'un système, les relations existant entre x, y, z et α, β, γ
- 6) En déduire une expression de α, β, γ en fonction de x, y, z

On introduit les colonnes coordonnées de $\vec{u}$ et de $p(\vec{u})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ respectivement}$$

- 7) Ecrire sous forme matricielle la relation existant entre ces deux vecteurs colonnes
- 8) Traiter les mêmes questions en remplaçant $p(\vec{u})$ par $s(\vec{u})$

Solution

- 1) Calculons le déterminant des trois vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times (-4) + 2 \times (-1) = -18$$

Le déterminant étant non nul, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace

- 2)
3)

$$s(\vec{u}) = p(\vec{u}) + (\vec{u} - p(\vec{u})) = 2p(\vec{u}) - \vec{u}$$

- 4)

$$p(\vec{u}) = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$$

$$s(\vec{u}) = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} - \gamma \vec{k}$$

- 5)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -\beta + \gamma \\ y = 4\alpha + \gamma \\ z = 2\alpha + 2\beta + 5\gamma \end{cases}$$

- 6) On résout le système précédent par la méthode de Gauss en prenant la troisième équation comme ligne pivot pour la première étape

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 5\gamma = z \\ 4\alpha + \gamma = y \\ -\beta + \gamma = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 5\gamma = z \\ -4\beta - 9\gamma = y - 2z \\ -\beta + \gamma = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 5\gamma = z \\ -4\beta - 9\gamma = y - 2z \\ -13\gamma = -4x + y - 2z \end{cases}$$

A ce stade le système est triangulaire. Nous allons le rendre diagonal en exécutant le même procédé de combinaisons mais en, remontant depuis la dernière

$$\left\{ \begin{array}{l} 26\alpha + 26\beta = -20x + 5y + 3z \\ 52\beta = -36x - 4y + 8z \\ -13\gamma = -4x + y - 2z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 26\alpha + 26\beta = -20x + 5y + 3z \\ 26\beta = -18x - 2y + 4z \\ -13\gamma = -4x + y - 2z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 26\alpha = -2x + 7y - z \\ 26\beta = -18x - 2y + 4z \\ -13\gamma = -4x + y - 2z \end{array} \right.$$

Finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} 26\alpha = -2x + 7y - z \\ 13\beta = -9x - y + 2z \\ 13\gamma = 4x - y + 2z \end{array} \right.$$

Soit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} -2 & 7 & -1 \\ -18 & -2 & 4 \\ 8 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On vérifie au passage que :

$$\frac{1}{26} \begin{pmatrix} -2 & 7 & -1 \\ -18 & -2 & 4 \\ 8 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) On a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -\beta \\ y' = 4\alpha \\ z' = 2\alpha + 2\beta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -\frac{1}{26}(-18x - 2y + 4z) \\ y' = 4 \times \frac{1}{26}(-2x + 7y - z) \\ z' = 2 \times \frac{1}{26}(-2x + 7y - z) + 2 \times \frac{1}{26}(-18x - 2y + 4z) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{13}(9x + y - 2z) \\ y' = \frac{1}{13}(-4x + 14y - 2z) \\ z' = \frac{1}{13}(-20x + 5y + 3z) \end{array} \right.$$

Soit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ -4 & 14 & -2 \\ -20 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On vérifie au passage que l'on a bien :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ -4 & 14 & -2 \\ -20 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8) On peut déduire de la relation $s(\vec{u}) = 2p(\vec{u}) - \vec{u}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{2}{13} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ -4 & 14 & -2 \\ -20 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 18 & 2 & -4 \\ -8 & 28 & -4 \\ -40 & 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -8 & 15 & -4 \\ -40 & 10 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On vérifie au passage que l'on a :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -8 & 15 & -4 \\ -40 & 10 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$