

## ***Symétrie vectorielle orthogonale par rapport à un plan dans l'espace***

Enoncé :

L'espace étant muni d'une base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les deux vecteurs suivants

$$\vec{I} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{J} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Soit  $p$  la projection vectorielle orthogonale sur le plan vectoriel engendré par les vecteurs  $\vec{I}$  et  $\vec{J}$  et  $s$  la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à ce même plan.

- 1) Vérifier que  $(\vec{I}, \vec{J})$  est bien une partie libre de l'espace
- 2) En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, déterminer une base orthonormale  $(\vec{I}_1, \vec{J}_1)$  du plan vectoriel engendré par  $(\vec{I}, \vec{J})$
- 3) Soit  $\vec{u}$  un vecteur quelconque de l'espace. Exprimer  $p(\vec{u})$  en fonction de  $\vec{u}, \vec{I}_1, \vec{J}_1$  et du produit scalaire
- 4) Exprimer  $s(\vec{u})$  en fonction de  $\vec{u}$  et de  $p(\vec{u})$

On décompose  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sous la forme :

$$\vec{u} = x \vec{I} + y \vec{J} + z \vec{K}$$

et on introduit les colonnes coordonnées de  $\vec{u}$  et de  $p(\vec{u})$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ respectivement}$$

- 5) Ecrire sous forme matricielle la relation existant entre ces deux vecteurs-colonne
- 6) Vérifier que  $\vec{J}$  est bien invariant par la transformation
- 7) Traiter les mêmes questions en remplaçant  $p(\vec{u})$  par  $s(\vec{u})$
- 8) Calculer les coordonnées de  $\vec{I} \wedge \vec{J}$  et montrer qu'il est changé en son opposé par la symétrie

## Solution

1) Partons de la nullité d'une combinaison linéaire de  $\vec{i}$  et de  $\vec{j}$

$$\begin{aligned}\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} 3\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \alpha = \beta &= 0\end{aligned}$$

2) Une base orthonormale s'obtient ainsi

$$\vec{i}_1 = \frac{1}{\|\vec{i}\|} \vec{i} : \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour  $\vec{j}_1$  on cherche d'abord  $\vec{j}_2$  orthogonal à  $\vec{i}_1$  sous la forme :

$$\vec{j}_2 = \alpha \vec{i}_1 + \vec{j}$$

La condition d'orthogonalité s'écrit :

$$\vec{j}_2 \cdot \vec{i}_1 = 0$$

Soit :

$$(\alpha \vec{i}_1 + \vec{j}) \cdot \vec{i}_1 = 0$$

Il en découle :

$$\alpha = -\vec{j} \cdot \vec{i}_1$$

D'où :

$$\vec{j}_2 = \vec{j} - (\vec{j} \cdot \vec{i}_1) \vec{i}_1$$

Sa colonne coordonnée dans  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} (3 \times 0 + 1 \times 1 + (-2) \times 2) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Reste à normer  $\vec{j}_2$  :

$$\vec{j}_1 = \frac{1}{\|\vec{j}_2\|} \vec{j}_2$$

Or :

$$\|\vec{j}_2\| = \frac{1}{5} \sqrt{225 + 64 + 16} = \frac{1}{5} \sqrt{305}$$

D'où :

$$\vec{j}_1 : \frac{5}{\sqrt{305}} \times \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{305}} \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- 3) Complétons  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1)$  en une base orthonormale de l'espace  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ . On a alors :

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i}_1) \vec{i}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{j}_1) \vec{j}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{k}_1) \vec{k}_1$$

On en déduit :

$$p(\vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{i}_1) \vec{i}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{j}_1) \vec{j}_1$$

4)

$$s(\vec{u}) = 2 p(\vec{u}) - \vec{u}$$

- 5) La relation 3) précédente se traduit par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} (y + 2z) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{305}} (15x + 8y - 4z) \frac{1}{\sqrt{305}} \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} (y + 2z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{305} (15x + 8y - 4z) \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{61}{305} \begin{pmatrix} 0 \\ y + 2z \\ 2y + 4z \end{pmatrix} + \frac{1}{305} \begin{pmatrix} 225x + 120y - 60z \\ 120x + 64y - 32z \\ -60x - 32y + 16z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{305} \begin{pmatrix} 225x + 120y - 60z \\ 120x + 125y + 90z \\ -60x + 90y + 260z \end{pmatrix}$$

Soit matriciellement, après simplification par 5:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{61} \begin{pmatrix} 45 & 24 & -12 \\ 24 & 25 & 18 \\ -12 & 18 & 52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

6) On peut vérifier que le vecteur  $\vec{j}$  est invariant :

$$\frac{1}{61} \begin{pmatrix} 45 & 24 & -12 \\ 24 & 25 & 18 \\ -12 & 18 & 52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

7) On se sert de la relation :

$$s(\vec{u}) = 2p(\vec{u}) - \vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{2}{61} \begin{pmatrix} 45 & 24 & -12 \\ 24 & 25 & 18 \\ -12 & 18 & 52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{61} \begin{pmatrix} 61 & 0 & 0 \\ 0 & 61 & 0 \\ 0 & 0 & 61 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{61} \begin{pmatrix} 29 & 48 & -24 \\ 48 & -11 & 36 \\ -24 & 36 & 43 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

8) Les coordonnées de  $\vec{i} \wedge \vec{j}$  sont :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du symétrique s'obtiennent en appliquant la matrice :

$$\frac{1}{61} \begin{pmatrix} 29 & 48 & -24 \\ 48 & -11 & 36 \\ -24 & 36 & 43 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$