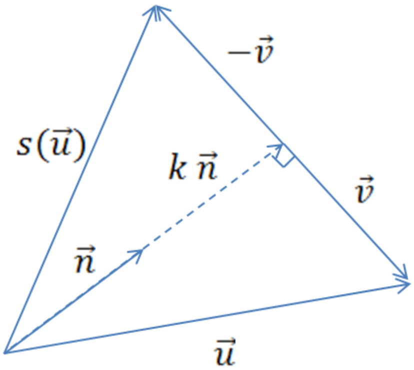
Projeté d'un vecteur sur un autre vecteur et Symétrique

Définitions :

Considérons deux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$, $\vec{n}$ étant non nul. Décomposons $\vec{u}$ en une somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{n}$ et d'un vecteur $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{n}$ soit :

$$\vec{u} = k\,\vec{n} + \vec{v}.$$



Alors, le **projeté orthogonal** de $\vec{u}$ sur $\vec{n}$ est le vecteur :

$$p(\vec{u}) = k\,\vec{n}$$

et le **symétrique** de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{n}$ est le vecteur :

$$s(\vec{u}) = k\,\vec{n} - \vec{v}$$

Propriétés :

Notons que :

$$s(\vec{u}) = k\,\vec{n} - (\vec{u} - k\,\vec{n})$$

Soit :

$$\boxed{s(\vec{u}) = 2\,p(\vec{u}) - \vec{u}}$$

Autrement dit, si on sait déterminer les coordonnées de $p(\vec{u})$ dans une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on saura obtenir celle de $s(\vec{u})$, voyons comment.

Faisons le produit scalaire de $\vec{u}$ avec $\vec{n}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = (k\,\vec{n} + \vec{v})\cdot\vec{n} = k\,\vec{n}\cdot\vec{n} + \vec{v}\cdot\vec{n} = k\,\|\vec{n}\|^2$$

On en déduit :

$$k = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$$

Ainsi :

$$p(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}$$

$$s(\vec{u}) = 2\,\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n} - \vec{u}$$

Ces deux formules permettent d'en déduire aisément les coordonnées de $p(\vec{u})$ et $s(\vec{u})$ dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ quelconque, pourvu qu'elle soit orthogonale.

Il est à noter que ces formules peuvent être retrouvées (et plus facilement mémorisées) par une autre voie, en se rappelant que le produit scalaire est un outil de projection. Considérons ainsi une base orthogonale $(\vec{I}, \vec{J})$ où on a :

$$\vec{I} = \frac{1}{\|\vec{n}\|}\,\vec{n}$$

alors, on a :

$$\vec{u} = \left(\vec{u} \cdot \vec{I}\right)\vec{I} + \left(\vec{u} \cdot \vec{J}\right)\vec{J}$$

et de façon évidente :

$$p(\vec{u}) = \left(\vec{u} \cdot \vec{I}\right)\vec{I}$$

$$s(\vec{u}) = 2\left(\vec{u} \cdot \vec{I}\right)\vec{I} - \vec{u}$$

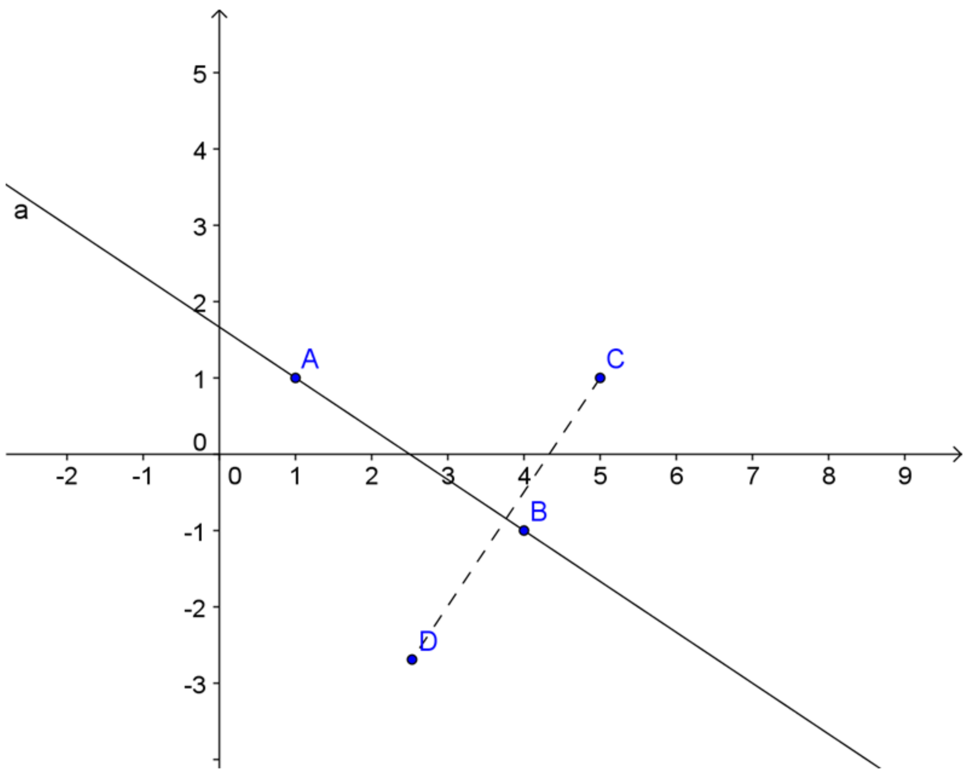
Ainsi :

$$p(\vec{u}) = \left(\vec{u} \cdot \frac{1}{\|\vec{n}\|}\,\vec{n}\right)\frac{1}{\|\vec{n}\|}\,\vec{n} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}$$

d'où les formules.

Voyons une application à titre d'exemple :

Soit à déterminer sur la figure ci dessous les coordonnées du point D symétrique du point C par rapport à la droite $(A\ B)$



On lit sur la figure les coordonnées de A, B, C :

$$A(1,1)\ ;\ \ B(4,-1)\ ;\ \ C(5,1)$$

On pose :

$$D(x,y)$$

On introduit les vecteurs :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC}\ \binom{4}{0}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB}\binom{3}{-2}$$

On calcule :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 4 \times 3 + 0 \times (-2) = 12$$

$$\|\vec{n}\|^2 = 3^2 + (-2)^2 = 9 + 4 = 13$$

On écrit :

$$\overrightarrow{AD} = 2\,\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n} - \vec{u}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = 2 \times \frac{12}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{72}{13} - 4 \\ \frac{-48}{13} - 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{72}{13} - 3 \\ \frac{-48}{13} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{72}{13} - \frac{39}{13} \\ \frac{-48}{13} + \frac{13}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{33}{13} \\ \frac{-35}{13} \end{pmatrix}$$

D’où :

$$D\left(\frac{33}{13}, \frac{-35}{13}\right)$$