

Enoncé :

1) Soient a, b deux réels et U, V deux suites réelles telles que :

$$0 < U_0 = a < V_0 = b$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} \\ V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que les deux suites convergent vers une même limite appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b

2) Soient a, b deux réels et U, V deux suites réelles telles que :

$$0 < U_0 = a < V_0 = b$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \\ V_{n+1} = \sqrt{U_{n+1} V_n} \end{cases}$$

Montrer que les deux suites convergent vers une même limite et la déterminer (on pourra poser :

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{a}{b} \right)$$

Solution :

Commençons par établir le préliminaire avant de résoudre les deux exercices :

$$\forall (a, b) \in]0; +\infty[^2: \quad a < b \Rightarrow \begin{cases} a < \sqrt{a b} < \frac{a+b}{2} < b \\ \frac{a+b}{2} - \sqrt{a b} < \frac{b-a}{2} \end{cases}$$

Il suffit de considérer pour les inégalités du haut :

$$a - \sqrt{a b} = \sqrt{a} (\sqrt{a} - \sqrt{b}) < 0$$

$$\frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2} < 0$$

$$a + b - 2\sqrt{a b} = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a} \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$$

et celle du bas :

$$a + b - 2\sqrt{a b} - (b - a) = 2a - 2\sqrt{a b} = 2\sqrt{a} (\sqrt{a} - \sqrt{b}) < 0$$

1) Notons que l'on a, d'après le préliminaire :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{V_n - U_n}{2}$$

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$P(n) = "0 < V_n - U_n \leq \frac{V_0 - U_0}{2^n}"$$

"

Initialisation : pour $n = 0$

$P(0)$ est vraie par donnée :

$$0 < V_0 - U_0 \leq \frac{V_0 - U_0}{2^0}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie donc :

$$0 < V_n - U_n \leq \frac{V_0 - U_0}{2^n}$$

alors d'après le préliminaire :

$$0 < V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{V_n - U_n}{2}$$

Ainsi :

$$0 < V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2} \frac{V_0 - U_0}{2^n} = \frac{V_0 - U_0}{2^{n+1}}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie, ce qui achève la démonstration

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_0 - U_0}{2^n} = 0$$

Il en découle par théorème des gendarmes que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = 0$$

et d'après le préliminaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n < U_{n+1} < V_{n+1} < V_n$$

donc U est strictement croissante, V strictement décroissante, et comme la suite $V - U$ tend vers 0, les deux suites sont adjacentes donc convergent vers une même limite.

2) Du préliminaire on tire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n < \frac{U_n + V_n}{2} < V_n$$

soit

$$U_n < U_{n+1} < V_n$$

puis :

$$U_{n+1} < \sqrt{U_{n+1} V_n} < V_n$$

d'où :

$$U_n < U_{n+1} < V_{n+1} < V_n$$

Donc la suite U est strictement croissante et la suite V strictement décroissante. De plus :

$$V_{n+1} - U_{n+1} < V_n - U_{n+1} = \frac{V_n - U_n}{2}$$

On en déduit par une récurrence du même type que précédemment :

$$0 < V_n - U_n \leq \frac{V_0 - U_0}{2^n}$$

puis par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = 0$$

Les suites U et V sont donc adjacentes et convergent vers une même limite que nous allons déterminer en posant :

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{a}{b} \right)$$

ce qui entraîne :

$$a = b \cos(\beta)$$

Calculons les premiers termes des deux suites en rappelant la propriété trigonométrique :

$$\frac{1 + \cos(x)}{2} = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\begin{cases} U_0 = b \cos(\beta) \\ V_0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1 = \frac{U_0 + V_0}{2} = b \frac{1 + \cos(\beta)}{2} = b \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ V_1 = \sqrt{U_1 V_0} = \sqrt{b \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) b} = b \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_2 = \frac{U_1 + V_1}{2} = b \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \frac{1 + \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2} = b \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\beta}{2^2}\right) \\ V_2 = \sqrt{U_2 V_1} = \sqrt{\left(b \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)^2 \cos^2\left(\frac{\beta}{2^2}\right)} = b \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2^2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_3 = b \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2^2}\right) \frac{1 + \cos\left(\frac{\beta}{2^2}\right)}{2} = b \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2^2}\right) \cos^2\left(\frac{\beta}{2^3}\right) \\ V_3 = \sqrt{\left(b \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2^2}\right)\right)^2 \cos^2\left(\frac{\beta}{2^3}\right)} = b \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2^3}\right) \end{cases}$$

Faisons alors la conjecture pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} U_n = V_n \cos\left(\frac{\beta}{2^n}\right) \\ V_n = b \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2^2}\right) \dots \cos\left(\frac{\beta}{2^n}\right) = b \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\beta}{2^k}\right) \end{cases}$$

et prouvons la par récurrence, l'initialisation ayant été faite pour les rangs 0 à 3. Supposons donc la conjecture vraie au rang n alors :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{U_n + V_n}{2} = \frac{1}{2} \left(V_n \cos\left(\frac{\beta}{2^n}\right) + V_n \right) = V_n \frac{1 + \cos\left(\frac{\beta}{2^n}\right)}{2} \\ &= V_n \cos^2\left(\frac{\beta}{2^{n+1}}\right) = b \left(\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\beta}{2^k}\right) \right) \cos\left(\frac{\beta}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{n+1} &= \sqrt{U_{n+1}V_n} = \sqrt{(V_n)^2 \cos^2\left(\frac{\beta}{2^{n+1}}\right)} = V_n \cos\left(\frac{\beta}{2^{n+1}}\right) \\
 &= b \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\beta}{2^k}\right)
 \end{aligned}$$

Donc la conjecture est vraie au rang $n + 1$ ce qui la prouve pour tous les rangs $n \in \mathbb{N}$

Il ne reste plus qu'à simplifier les expressions précédentes en notant que :

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\beta}{2^k}\right) &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{2 \sin\left(\frac{\beta}{2^k}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2^k}\right)}{2 \sin\left(\frac{\beta}{2^k}\right)} \right) \\
 &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2^{k-1}}\right)}{2 \sin\left(\frac{\beta}{2^k}\right)} \right)
 \end{aligned}$$

Après sortie du facteur 2 du signe produit, Il s'agit d'un produit télescopique qui vaut :

$$\frac{1}{2^n} \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2^{1-1}}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2^n}\right)} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(\beta)}{\sin\left(\frac{\beta}{2^n}\right)}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} U_n = V_n \cos\left(\frac{\beta}{2^n}\right) \\ V_n = \frac{b}{2^n} \frac{\sin(\beta)}{\sin\left(\frac{\beta}{2^n}\right)} \end{cases}$$

Soit en prenant des équivalents :

$$\begin{cases} U_n \sim V_n \cos\left(\frac{\beta}{2^n}\right) \sim V_n \sim \frac{b \sin(\beta)}{\beta} \\ V_n \sim \frac{b}{2^n} \frac{\sin(\beta)}{\frac{\beta}{2^n}} \sim \frac{b \sin(\beta)}{\beta} \end{cases}$$

Ainsi les deux suites U et V ont pour limite commune :

$$\frac{b \sin(\beta)}{\beta} = \frac{b \sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right)}{\cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)}$$

