<u>Enoncé</u> <u>(oral polytechnique 1982):</u>

Soit la suite (I_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\boldsymbol{I_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2\,x}\, dx}$$

Déterminer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} I_n$

<u>Correction</u> :

<u>1ère étape : convergence de la suite :</u>

Considérons d'abord la suite de terme général :

$$U_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n\, Ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

Montrons que cette suite est strictement croissante en considérant sur $[1, +\infty[$ la fonction :

$$g(t) = t\, Ln\left(1 + \frac{x}{t}\right)$$

de dérivée :

$$g'(t) = Ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) + t\, \left(-\frac{x}{t^2}\right)\frac{1}{1 + \frac{x}{t}} = Ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) - \frac{\frac{x}{t}}{1 + \frac{x}{t}}$$

Posons :

$$h(y) = Ln(1 + y) - \frac{y}{1 + y}$$

h est dérivable sur $[0, +\infty[$ et :

$$h'(y) = \frac{1}{1 + y} - \frac{1}{(1 + y)^2} = \frac{y}{(1 + y)^2} > 0$$

Comme $h(0) = 0$, on en déduit h strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et :

$$\forall\, y \in\,]0, +\infty[\, :\; h(y) > 0$$

Donc :

$$\forall\, t \in\; [1, +\infty[\, :\; g'(t) > 0$$

g est donc strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et la suite (U_n) est donc strictement croissante. Or :

$$n\, Ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \sim n\, \frac{x}{n} \sim x$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Et ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$$

<u>Remarque</u> : On pouvait, pour obtenir cette simple majoration, se passer de passer par le caractère croissant de la suite en notant par convexité de la fonction e^x que :

$$0 \leq 1+\frac{x}{n} \leq e^{\frac{x}{n}}$$

puis en élevant à la puissance n.

On a maintenant :

$$I_n \leq \int_0^n e^x\, e^{-2\,x}\, dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-\,x}\, dx = 1$$

La suite est donc majorée par 1

De plus

$$\int_0^{n+1} \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\ e^{-2\,x}\, dx \geq \int_0^{n} \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\ e^{-2\,x}\, dx \geq \int_0^{n} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\ e^{-2\,x}\, dx = I_n$$

Donc :

$$I_{n+1} \geq I_n$$

La suite est donc croissante. On en déduit qu' elle converge vers une limite $L \leq 1$

<u>2ème étape : valeur de la limite par minoration</u> :

Soit un réel quelconque $a \geq 0$ alors pour $n \geq a$:

$$\int_0^{a} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\ e^{-2\,x}\, dx\ \leq I_n \qquad (1)$$

Considérons alors sur l'intervalle $I = [0, a]$ la suite de fonctions :

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\ e^{-2\,x}$$

Cette suite converge simplement vers la fonction $e^{-\,x}$ sur I. Montrons que la convergence est uniforme.

Soit $x \in [0, a]$ alors :

$$0 \leq e^{-\,x} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\ e^{-2\,x} = e^{-\,x} - e^{n\,Ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^{-\,x}\left(1 - e^{n\,Ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-x}\right)$$

Or :

$$n\,Ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - x\ \leq 0$$

Et pour tout réel u on a, par convexité de la fonction exponentielle :

$$e^u \geq 1+u$$

soit

$$0 \leq 1 - e^{u} \leq -u$$

Donc :

$$0 \leq e^{-x} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} e^{-2x} \leq x - n\, Ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = n \left(\frac{x}{n} - Ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$$

Or la fonction k définie par :

$$k(t) = t - Ln(1 + t)$$

est dérivable sur $[0, +\infty[$ et sur $]0, +\infty[$:

$$k'(t) = 1 - \frac{1}{1 + t} = \frac{t}{1 + t} > 0$$

Donc k est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et ainsi :

$$0 \leq e^{-x} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} e^{-2x} \leq n \left(\frac{a}{n} - Ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right)$$

Or :

$$n \left(\frac{a}{n} - Ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right) \sim n\, \frac{a^2}{2\, n^2} = \frac{a^2}{2n}$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{a}{n} - Ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right) = 0$$

La suite de fonctions $\left(f_n(x)\right)$ tend donc uniformément vers e^{-x} sur $[0, a]$. On en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^a \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} e^{-2x}\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^a f_n(x)\, dx = \int_0^a e^{-x}\, dx$$

Et par passage à la limite dans l'inégalité (1) :

$$\int_0^a e^{-x}\, dx \leq L$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, on en déduit par passage à la limite dans l'inégalité précédente :

$$1 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx \leq L$$

Donc :

$$L = 1$$