Enoncé :

Soit f une fonction de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ continue et bornée et la suite (I_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\boldsymbol{I_n = \int_0^{+\infty} n\, f(x)\, e^{-n\,x}\, dx}$$

a) Déterminer :

$$\boldsymbol{L = \lim_{n \longrightarrow +\infty} I_n}$$

b) On suppose que f admet une dérivée à droite en 0. Donner un équivalent de $I_n - L$

c) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner un développement asymptotique de I_n à l'ordre p sur l'échelle de comparaison $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$.

Correction :

a) Traduisons la continuité en 0 par l'existence d'une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que :

$$\forall\, x \in [0,+\infty[\ :\ f(x) = f(0) + \varepsilon(x)$$

Alors :

$$I_n = \int_0^{+\infty} n\, f(0)\, e^{-n\,x}\, dx + \int_0^{+\infty} n\, \varepsilon(x)\ e^{-n\,x}\, dx$$

Or :

$$\int_0^{+\infty} n\, f(0)\, e^{-n\,x}\, dx = f(0)\, [-\, e^{-n\,x}]_0^{+\infty} = f(0)$$

Et pour un réel quelconque $a > 0$:

$$\int_0^{+\infty} n\, \varepsilon(x)\ e^{-n\,x}\, dx = \int_0^{a} n\, \varepsilon(x)\ e^{-n\,x}\, dx + \int_a^{+\infty} n\, \varepsilon(x)\ e^{-n\,x}\, dx$$

Donc :

$$\left|\int_0^{+\infty} n\, \varepsilon(x)\ e^{-n\,x}\, dx\right| \leq \int_0^{a} n\, |\varepsilon(x)| e^{-n\,x}\, dx + \int_a^{+\infty} n\, |\varepsilon(x)|\ e^{-n\,x}\, dx$$

Or f étant bornée sur $[0,+\infty[$, ε l'est aussi, donc il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in [0,+\infty[\ :\ |\varepsilon(x)| \leq M$$

ε tendant vers 0 en 0, pour un réel $h > 0$ arbitraire, il existe un réel $a > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in\ [0, a]\ :\ |\varepsilon(x)| < h$$

Pour ce réel a on a donc :

$$\left|\int_0^{+\infty} n\, \varepsilon(x)\ e^{-n\,x}\, dx\right| \leq h \int_0^{a} n\, e^{-n\,x}\, dx + M \int_a^{+\infty} n\ e^{-n\,x}\, dx$$

Soit :

$$\left|\int_0^{+\infty} n\,\varepsilon(x)\;\; e^{-n\,x}\,dx\right| \leq h\,(1-e^{-n\,a}) + M\,e^{-n\,a}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} h\,(1-e^{-n\,a}) + M\,e^{-n\,a} = h < 2\,h$$

Donc :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \;\Rightarrow\; \left|\int_0^{+\infty} n\,\varepsilon(x)\,e^{-n\,x}\,dx\right| < 2\,h$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} n\,\varepsilon(x)\,e^{-n\,x}\,dx = 0$$

Et :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = f(0)$$

b)) Traduisons la dérivabilité à droite en 0 par l'existence d'une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que :

$$\forall\, x \in [0,+\infty[\, :\; f(x) = f(0) + x\,f_d'(0)\; + x\,\varepsilon(x)$$

Alors :

$$I_n = \int_0^{+\infty} n\,f(0)\,e^{-n\,x}\,dx + \int_0^{+\infty} n\,x\,f_d'(0)\,e^{-n\,x}\,dx + \int_0^{+\infty} n\,x\,\varepsilon(x)\;\; e^{-n\,x}\,dx$$

Or, en intégrant par partie :

$$\int_0^{+\infty} n\,x\,f_d'(0)\,e^{-n\,x}\,dx = f_d'(0)\left([-x\,e^{-n\,x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-n\,x}\,dx\right) = \frac{f_d'(0)}{n}$$

Et pour un réel quelconque $a > 0$:

$$\int_0^{+\infty} n\,x\,\varepsilon(x)\;\; e^{-n\,x}\,dx = \int_0^{a} n\,x\,\varepsilon(x)\;\; e^{-n\,x}\,dx + \int_a^{+\infty} n\,x\,\varepsilon(x)\;\; e^{-n\,x}\,dx$$

Donc :

$$\left|\int_0^{+\infty} n\,\varepsilon(x)\;\; e^{-n\,x}\,dx\right| \leq \int_0^{a} n\,x\,|\varepsilon(x)|e^{-n\,x}\,dx + \int_a^{+\infty} n\,x\,|\varepsilon(x)|\;\; e^{-n\,x}\,dx$$

Or f étant bornée sur $[0,+\infty[$, ε l'est aussi, donc il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in [0,+\infty[\, :\; |\varepsilon(x)| \leq M$$

ε tendant vers 0 en 0, pour un réel $h > 0$ arbitraire, il existe un réel $a > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in\; [0,a] :\; |\varepsilon(x)| < h$$

Pour ce réel a on a donc :

$$\left|\int_0^{+\infty} n\,x\,\varepsilon(x)\;\; e^{-n\,x}\,dx\right| \leq h\int_0^{a} n\,x\,e^{-n\,x}\,dx + M\int_a^{+\infty} n\,x\,e^{-n\,x}\,dx$$

Soit, après intégrations par partie :

$$\left|\int_0^{+\infty} n\,x\,\varepsilon(x)\;\; e^{-n\,x}\,dx\right| \leq h\left(\frac{1-e^{-n\,a}}{n} - a\,e^{-n\,a}\right) + M\,\frac{e^{-n\,a}}{n}$$

Donc, en multipliant par n les deux membres :

$$\left|n\int_0^{+\infty} n\,x\,\varepsilon(x)\;\; e^{-n\,x}\,dx\right| \leq h\left((1-e^{-n\,a}) - a\,n\,e^{-n\,a}\right) + M\,e^{-n\,a}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} h\left((1-e^{-n\,a}) - a\,n\,e^{-n\,a}\right) + M\,e^{-n\,a} = h < 2\,h$$

Donc :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \;\Rightarrow\; \left|n\int_0^{+\infty} n\,x\,\varepsilon(x)\;\; e^{-n\,x}\,dx\right| < 2\,h$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{+\infty} n\,\varepsilon(x)\,e^{-n\,x}\,dx = 0$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} n\,\varepsilon(x)\,e^{-n\,x}\,dx = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Et :

$$I_n - f(0) \sim \frac{f'_d(0)}{n}$$

c) Intégrons par partie en posant :

$$u(x) = f(x), \qquad v'(x) = n\;\, e^{-n\,x}$$

$$u'(x) = f'(x), \qquad v(x) = -e^{-n\,x}$$

$$I_n = \;\left[-f(x)\,e^{-n\,x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f'(x)\,e^{-n\,x}\,dx$$

$$= f(0) + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} n\,f'(x)\,e^{-n\,x}\,dx$$

Et par une récurrence triviale :

$$I_n = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{n} + \frac{f^{(2)}(0)}{n^2} + \cdots + \frac{f^{(p)}(0)}{n^p} + \frac{1}{n^{p+1}}\int_0^{+\infty} n\,f^{(p+1)}(x)\,e^{-n\,x}\,dx$$

Où :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} n\, f^{(p+1)}(x)\, e^{-n\,x}\, dx = f^{(p+1)}(0)$$

Soit :

$$\frac{1}{n^{p+1}} \int_0^{+\infty} n\, f^{(p+1)}(x)\, e^{-n\,x}\, dx = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$$