Suite d'intégrales

<u>Enoncé</u> 1

Soit f une fonction de classe C_1 sur $[0,1]$ telle que $f(1) \neq 0$ et soit la suite définie par :

$$\boldsymbol{U_n = \int_0^1 t^n f(t)\, dt}$$

1) **Montrer que l'on a :**
$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} U_n = 0}$$
2) **Déterminer un équivalent de U_n**
3) **On se place dans le cas où $f(1) = 0$. En supposant que f est une fonction de classe C_2 sur $[0,1]$ telle que $f'(1) \neq 0$, déterminer un équivalent de U_n**

<u>Solution</u> :

1) f étant en particulier continue, elle est bornée sur $[0,1]$. Donc, il existe un réel M tel que l'on ait sur $[0,1]$: $|f| \leq M$. Ainsi :

$$|U_n| \leq \int_0^1 |t^n f(t)|\, dt \leq \int_0^1 M\, t^n\, dt = M \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{M}{n+1}$$

Le théorème des gendarmes nous assure alors que U_n tend vers 0

2) Faisons une intégration par partie en posant :

$$u' = t^n\,,\ \ u = \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$v = f(t)\,,\ \ v' = f'(t)$$

Alors :

$$U_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\, f(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\, f'(t)\, dt$$

$$U_n = \frac{f(1)}{n+1} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\, f'(t)\, dt$$

Posons :

$$V_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} f'(t)\, dt$$

f' étant continue, elle est bornée sur $[0,1]$. Donc, il existe un réel M' tel que l'on ait sur $[0,1]$: $|f| \leq M'$. Ainsi :

$$|V_n| \leq \int_0^1 \left|\frac{t^{n+1}}{n+1} f'(t)\right| dt \leq \int_0^1 M' \frac{t^{n+1}}{n+1}\, dt = M' \left[\frac{t^{n+2}}{(n+1)\,(n+2)}\right]_0^1 = \frac{M'}{(n+1)\,(n+2)}$$

Soit :

$$|n\, V_n| \leq \frac{n\, M'}{(n+1)\,(n+2)}$$

Le théorème des gendarmes nous assure alors que la suite $n\, V_n$ tend vers 0. Ainsi :

$$n\, U_n = \frac{n\, f(1)}{n+1} - n\, V_n$$

Donc la suite $n\, U_n$ tend vers $f(1)$ qui n'est pas nul soit :

$$\boxed{U_n \sim \frac{f(1)}{n}}$$

3) Reprenons à partir de l'intégration par partie précédente qui donne :

$$U_n = -\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} f'(t)\, dt$$

Et refaisons une intégration par partie en posant :

$$u' = \frac{t^{n+1}}{n+1}\ ,\ \ u = \frac{t^{n+2}}{(n+1)\,(n+2)}$$

$$v = f'(t)\ ,\ \ v' = f''(t)$$

Alors :

$$U_n = -\left[\frac{t^{n+2}}{(n+1)\,(n+2)} f'(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(n+1)\,(n+2)} f''(t)\, dt$$

$$U_n = -\frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} + \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)} f''(t)\, dt$$

Posons :

$$W_n = \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(n+1)\,(n+2)}\, f''(t)\, dt$$

f'' étant continue, elle est bornée sur $[0,1]$. Donc, il existe un réel M'' tel que l'on ait sur $[0,1]$: $|f| \leq M''$. Ainsi :

$$|w_n| \leq \int_0^1 \left|\frac{t^{n+2}}{(n+1)\,(n+2)}\, f''(t)\right| dt \leq \int_0^1 M''\, \frac{t^{n+2}}{(n+1)\,(n+2)}\, dt$$

$$= M'' \left[\frac{t^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]_0^1 = \frac{M''}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Soit :

$$|n^2\, w_n| \leq \frac{n^2\, M'}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Le théorème des gendarmes nous assure alors que la suite $n^2\, w_n$ tend vers 0. Ainsi :

$$n^2\, U_n = \frac{n^2\, f'(1)}{(n+1)(n+2)} + n^2\, w_n$$

Donc la suite $n^2\, U_n$ tend vers $f'(1)$ qui n'est pas nul soit :

$$\boxed{U_n \sim -\frac{f'(1)}{n^2}}$$