Calcul du champ électrostatique créé par un cylindre sur son axe de révolution

On rappelle pour cet exercice le résultat suivant :

Pour $b > 0$ la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + b}}$$

admet pour primitive :

$$F(x) = Ln\left(x - a + \sqrt{(x-a)^2 + b}\right)$$

On considère alors un cylindre de hauteur $L = 2\,b$ et de rayon R. Ce système est chargé en surface avec la densité uniforme :

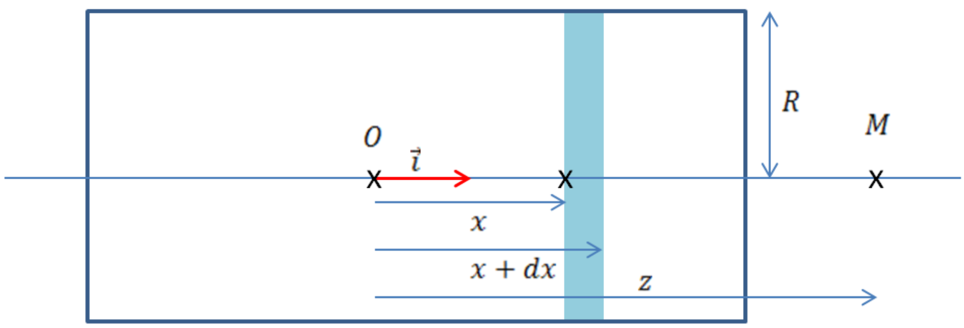
$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Où Q est la charge totale portée par le cylindre et S la surface latérale du cylindre.

On rappelle la formule établie en cours pour le potentiel électrostatique créé par un cercle de rayon *r* uniformément chargé avec la charge *q*, à une distance *a* sur son axe de symétrie :

$$V(a) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

On peut alors diviser le cylindre en surfaces élémentaires, en considérant des cercles repérés par l'abscisse x de leur centre sur l'axe $(O, \vec{\imath})$ du cylindre, O étant le centre de gravité du cylindre, tel que défini par la figure ci-dessous :



1) Déterminer l'aire d^1S de la surface élémentaire située entre les abscisses x et $x + dx$ en fonction de R et dx (1 pt)
2) En déduire la charge $d^1q = \sigma\, d^1S$ portée par la surface élémentaire en fonction de $Q, b,$ et dx (1 pt)
3) Calculer le potentiel électrostatique $d^1V(x)$ créé par la surface élémentaire en un point M d'abscisse z de l'axe du cylindre (1 pt)
4) En déduire par calcul intégral l'expression du potentiel électrostatique $V(z)$ créé par le cylindre au point M d'abscisse z de l'axe en fonction de $Q, b, R, \varepsilon_0, z$ (1 pt)

5) En déduire le champ électrostatique $\vec{E}$ en un point M d'abscisse z de l'axe en fonction de $Q, b, R, \varepsilon_0, z$ et vérifier que $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$ (1,5 pt)
6) Vérifier que le champ électrostatique tend vers celui donné par une charge ponctuelle Q placée en O lorsque z tend vers l'infini. (1,5 pt)

Corrrection :

1) On a :

$$\boxed{d^1S = 2\,\pi\,R\,dx}$$

2) On en déduit :

$$\boxed{d^1q = \sigma\,d^1S = \frac{Q}{S}\,2\,\pi\,R\,dx = \frac{2\,\pi\,R\,Q}{2\,\pi\,R\,L}\,dx = \frac{Q}{L}\,dx = \frac{Q}{2\,b}\,dx}$$

3) On a :

$$\boxed{d^1V(x) = \frac{d^1q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{M(x)\,C(x)} = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\,\frac{dx}{\sqrt{R^2 + (x-z)^2}}}$$

4) On en déduit :

$$V(z) = \int_{-b}^{b} d^1V(x)$$

$$= \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\int_{-b}^{b}\frac{dx}{\sqrt{(x-z)^2 + R^2}}$$

$$= \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left[Ln\left(x - z + \sqrt{(x-z)^2 + R^2}\right)\right]_{-b}^{b}$$

$$\boxed{V(z) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\,Ln\left(\frac{b - z + \sqrt{(b-z)^2 + R^2}}{-b - z + \sqrt{(-b-z)^2 + R^2}}\right)}$$

5) Le champ est porté par l'axe et sa composante sur $\vec{\imath}$ est :

$$E_x(z) = -\frac{dV(z)}{dz}$$

On note que :

$$V(z) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\,\left(Ln\left(b - z + \sqrt{(b-z)^2 + R^2}\right) - Ln\left(-b - z + \sqrt{(-b-z)^2 + R^2}\right)\right)$$

Et on peut utiliser la formule rappelée au début en posant $t = b - z$ pour dériver par composée le premier logarithme et $t = -b - z$ pour dériver le second. Ainsi :

$$E_x(z) = -\frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left(-\frac{1}{\sqrt{(b-z)^2+R^2}}+\frac{1}{\sqrt{(-b-z)^2+R^2}}\right)$$

$$\boxed{E_x(z) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left(\frac{1}{\sqrt{(b-z)^2+R^2}}-\frac{1}{\sqrt{(-b-z)^2+R^2}}\right)}$$

On a :

$$E_x(-z) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left(\frac{1}{\sqrt{(b+z)^2+R^2}}-\frac{1}{\sqrt{(-b+z)^2+R^2}}\right)$$

$$= \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left(\frac{1}{\sqrt{(-b-z)^2+R^2}}-\frac{1}{\sqrt{(b-z)^2+R^2}}\right)$$

$$= -E_x(z)$$

6) Transformons E_x :

$$E_x(z) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left(\frac{\sqrt{(-b-z)^2+R^2}-\sqrt{(b-z)^2+R^2}}{\sqrt{(b-z)^2+R^2}\,\sqrt{(-b-z)^2+R^2}}\right)$$

$$= \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left(\frac{((-b-z)^2+R^2)-((b-z)^2+R^2)}{\sqrt{(b-z)^2+R^2}\,\sqrt{(-b-z)^2+R^2}\,\left(\sqrt{(-b-z)^2+R^2}+\sqrt{(b-z)^2+R^2}\right)}\right)$$

$$= \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left(\frac{(-b-z)^2-(b-z)^2}{\sqrt{(b-z)^2+R^2}\,\sqrt{(-b-z)^2+R^2}\,\left(\sqrt{(-b-z)^2+R^2}+\sqrt{(b-z)^2+R^2}\right)}\right)$$

$$= \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left(\frac{4\,b\,z}{\sqrt{(b-z)^2+R^2}\,\sqrt{(-b-z)^2+R^2}\,\left(\sqrt{(-b-z)^2+R^2}+\sqrt{(b-z)^2+R^2}\right)}\right)$$

$$= \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{(b-z)^2+R^2}\,\sqrt{(-b-z)^2+R^2}\,\left(\sqrt{(-b-z)^2+R^2}+\sqrt{(b-z)^2+R^2}\right)}\right)$$

Nous pouvons maintenant faire tendre z vers $+\infty$ et :

$$E_x(z) \approx \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{z}{z\,z\,(z+z)} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{z^2}$$

Nous retrouvons bien l'expression du champ créé par une charge ponctuelle Q placée en O