Champ créé par une demi-sphère

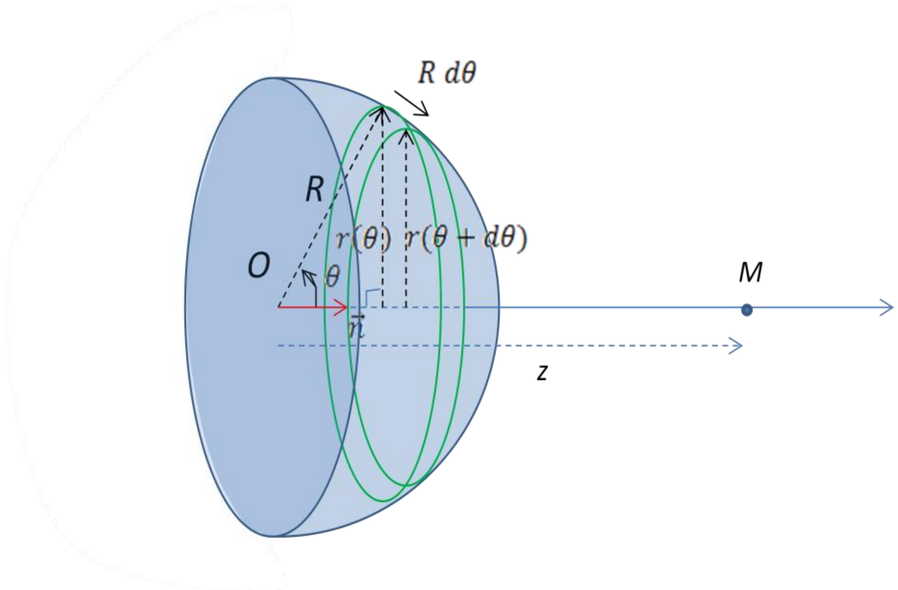
On considère une demi-sphère de rayon $R = 10\,cm$ uniformément chargée portant la charge *Q*. Le but de l'exercice est le calcul du champ électrique en un point de l'axe de symétrie (O ; $\vec{n}$) de la demi-sphère.

Contrairement à l'exercice précédent, nous allons commencer par déterminer le potentiel électrostatique en un point d'abscisse z > 0 sur cet axe et en déduire le champ électrique.

On rappelle la formule établie en cours pour le potentiel électrostatique créé par un cercle de rayon *r* uniformément chargé avec la charge *q*, à une distance *a* sur son axe de symétrie :

$$V(a) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

On peut alors diviser la demi-sphère en surfaces élémentaires, en considérant des cercles repérés par un angle θ tel que défini par la figure ci-dessous :



1) Déterminer le rayon $r(\theta)$ d'un cercle en fonction de R et de θ (0,5 point)
2) Déterminer l'aire d^1S de l'élément de surface différentiel situé entre les cercles de rayons $r(\theta)$ et $r(\theta + d\theta)$ (0,5 point)
3) En déduire l'aire de la demi-sphère par calcul intégral (0,5 point)
4) En déduire la densité surfacique de charges σ en fonction de R et Q (0,5 point)
5) En déduire la charge $d^1q = \sigma\, d^1S$ portée par l'élément de surface en fonction de *R*, de θ et de $d\theta$ (0,5 point)

6) Calculer le potentiel électrostatique *dV(z)* créé par l'élément de surface en un point d'abscisse z de l'axe. On pourra commencer par évaluer la distance $a(\theta)$ entre le point *M* et le centre du cercle repéré par θ (0,5 point)
7) En déduire l'expression intégrale du potentiel électrostatique créé par la demi-sphère en ce point (0,5 point)
8) Par changement de variable adéquat, calculer cette intégrale et montrer que le potentiel s'exprime pour tout z, par la formule (1 point) :

$$V(z) = \frac{2\,b\,R^2}{\sqrt{z^2+R^2}+|z-R|}$$

en posant :

$$b = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R^2}$$

9) Vérifier que l'on retrouve la formule du potentiel créé par une charge ponctuelle lorsque l'on fait tendre *R* vers 0 (0,5 point)
10) Tracer l'allure de la courbe de potentiel $V(z)$ pour z réel (sans faire d'étude détaillée mais on fera apparaître les valeurs en *0*, en *R,* et en $\pm\infty$) et indiquer s'il y a continuité du potentiel le long de l'axe ? (1 point)
11) Exprimer la composante $E_z(z)$ du champ électrique sur l'axe (O ; $\vec{n}$) en fonction de *b*, *z* et *R* (1 point)
12) Calculer $E_z(0)$, $E_z(R/2)$, $E_z(R^-) = \lim_{\substack{z\to R\\ z<R}} E_z(z)$, $E_z(R^+) = \lim_{\substack{z\to R\\ z>R}} E_z(z)$. Y a-t-il continuité du champ en z = R ? (1 point)
13) Calculer $E_z(R^+) - E_z(R^-)$ et comparer cette valeur à celle donnée par le théorème de Gauss. L'hypothèse d'une sphère uniformément chargée et en équilibre est elle en accord avec le résultat obtenu ? (1 point)
14) Tracer l'allure de la courbe du champ $E_z(z)$ le long de l'axe (on fera apparaître les valeurs en *0*, en *R,* et en $\pm\infty$) (1 point)

Correction :

1)

$$\boxed{r(\theta) = R\sin(\theta)}$$

2)

$$\boxed{d^1S = 2\,\pi\, r(\theta)\, R\, d\theta = 2\,\pi\, R^2 \sin(\theta)\;\, d\theta}$$

3)

$$\boxed{S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,\pi\, R^2 \sin(\theta)\;\, d\theta = 2\,\pi\, R^2 [-\cos(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \;2\,\pi\, R^2}$$

4)

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{2\,\pi\, R^2}}$$

5)

$$\boxed{d^1q = \;\sigma\, d^1S = Q\;\,\sin(\theta)\;\, d\theta}$$

6)

$$dV(z) = \frac{d^1q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{r^2(\theta) + a^2(\theta)}} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{R^2\, sin^2(\theta) + (z - R\cos(\theta))^2}}$$

$$\boxed{dV(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2\,R\,z\cos(\theta)}}}$$

7)

$$\boxed{V(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2\,R\,z\cos(\theta)}}\; d\theta}$$

8)

On fait, pour $z \neq 0$, le changement de variable :

$$\begin{cases} t = z^2 + R^2 - 2\,R\,z\cos(\theta) \\ \quad dt = 2\,R\,z\;\,\sin(\theta)\;\, d\theta \end{cases}$$

$$V(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \int_{z^2+R^2-2\,R\,z}^{z^2+R^2} \frac{1}{2\,R\,z\sqrt{t}}\; dt = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\, R\, z}\;\left[\sqrt{t}\right]_{z^2+R^2-2\,R\,z}^{z^2+R^2}$$

$$V(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{\sqrt{z^2+R^2} - \sqrt{z^2+R^2-2\,R\,z}}{R\,z} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{(z^2+R^2)-(z^2+R^2-2\,R\,z)}{R\,z\left(\sqrt{z^2+R^2}+\sqrt{z^2+R^2-2\,R\,z}\right)}$$

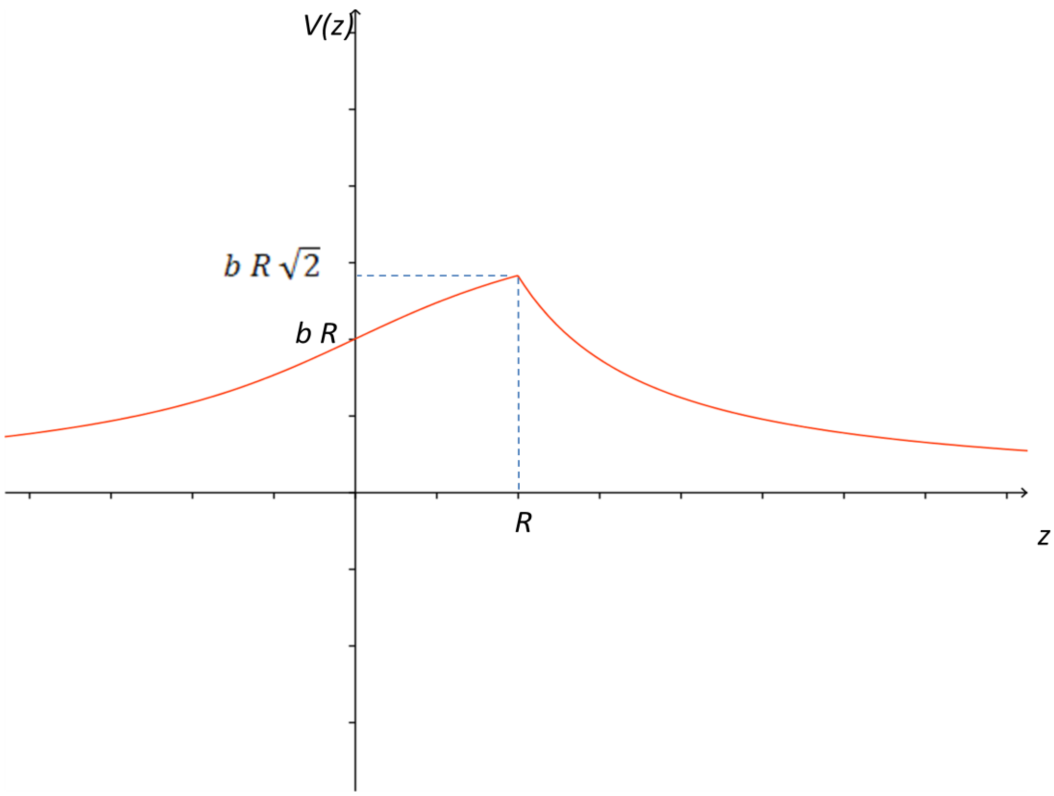
$$\boxed{V(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{2}{\sqrt{z^2+R^2}+\sqrt{z^2+R^2-2\,R\,z}} = \frac{2\,b\,R^2}{\sqrt{z^2+R^2}+|z-R|}}$$

9)

Si on fait tendre R vers 0, le potentiel tend vers l'expression :

$$\boxed{V(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{|z|}}$$

10)



11)

$$E_z(z) = -\frac{dV}{dz} = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} + \frac{z-R}{\sqrt{z^2+R^2-2R\,z}}}{\left(\sqrt{z^2+R^2}+|z-R|\right)^2}$$

$$\boxed{E_z(z) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\left(\sqrt{z^2+R^2}+|z-R|\right)^2} \times \left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} + \frac{z-R}{|z-R|}\right)}$$

Soit si $z < R$:

$$\boxed{E_z(z) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\left(\sqrt{z^2 + R^2} + R - z\right)^2} \times \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1\right)}$$

et si $z > R$:

$$\boxed{E_z(z) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\left(\sqrt{z^2 + R^2} + z - R\right)^2} \times \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} + 1\right)}$$

12)

$$E_z(0) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{4\,R^2} \times (-1) = -0\ 5\ b$$

$$E_z\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{4}{R^2\left(\sqrt{5} + 1\right)^2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 1\right) \approx -0{,}42\ b$$

$$E_z(R^-) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{2\,R^2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \approx -0{,}29\ b$$

$$E_z(R^+) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{2\,R^2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) \approx 1{,}7\ b$$

13)

$$\boxed{E_z(R^+) - E_z(R^-) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Ce résultat est en accord avec l’hypothèse d’un conducteur en équilibre électrostatique pour lequel le théorème de Gauss conduit à :

$$\boxed{E_z(R^+) - E_z(R^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

14)