Calcul avec les opérateurs mathématiques

1) On suppose qu'un champ de forces (champ électrostatique par exemple) est défini dans une région de l'espace dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) par :

$$\vec{E} = -2\,x\;\vec{\imath} - \;2\,z^2\,\vec{\jmath} - (3 + 4\,y\,z)\,\vec{k}$$

Vérifier par les conditions de Schwarz que ce champ dérive d'un potentiel (égalité des dérivées croisées)

Déterminer dans cette région, le potentiel associé à ce champ de force, soit la fonction $V(x, y, z)$ telle que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

(Attention au signe cette fois-ci !!!!)

2) Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$ associé au potentiel suivant :

$$V(x, y, z) = (x + 2\,y)\,e^{-z}$$

<u>Correction</u>

1)
Notons $E_x = -2\,x, E_y = -\,2\,z^2, E_z = -(3 + 4\,y\,z)$
Dire que le champ de force dérive d'un potentiel revient à dire que son travail élémentaire δW est une différentielle exacte. Or :

$$\delta W = E_x\,dx + \;E_y\,dy + E_z\,dz = -dV = d(-V)$$

Comparons les dérivées croisées :

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -4\,z = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

Les conditions de Schwarz sont donc vérifiées. Déterminons alors le potentiel V tel que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -E_x = 2\,x \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = -E_y = 2\,z^2 \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -E_z = 3 + 4\,y\,z \end{cases}$$

L'intégration de la première donne :

$$V = x^2 + f(y,z)$$

En reportant dans la seconde :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\,z^2$$

Soit :

$$f(y,z) = 2\,y\,z^2 + g(z)$$

En reportant dans la dernière :

$$4\,y\,z + g'(z) = 3 + 4\,y\,z$$

Donc :

$$g'(z) = 3$$

$$g(z) = 3\,z + cste$$

Finalement, on peut prendre pour potentiel :

$$\boxed{V = x^2 + 2\,y\,z^2 + 3\,z}$$

2) On donne

$$V = (x + 2\,y)\,e^{-z}$$

Soit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = e^{-z} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = 2\,e^{-z} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -(x + 2\,y)\,e^{-z} \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{k} = e^{-z}\left(-\vec{\imath} - 2\,\vec{\jmath} + (x + 2\,y)\,\vec{k}\right)}$$