Sommes de Riemann

<u>Enoncé</u> 1

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \quad \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \, sin\left(\frac{k\,\pi}{n}\right)$$

<u>Enoncé</u> 2

Donner des équivalents des sommes suivantes quand n tend vers l'infini :

$$a) \quad \sum_{k=1}^{n} k^p \qquad b) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2\,k)^3} \qquad c) \quad \sum_{k=n+1}^{2\,n} \frac{1}{k^2} \qquad d) \quad \sum_{k=1}^{n} Ln(k+n)$$

<u>Solutions</u> :

<u>Enoncé 1</u>

Faisons apparaitre une somme de Riemann sur l'intervalle $[0;1]$ de pas $1/n$:

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \, sin\left(\frac{k\,\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \, sin\left(\frac{k\,\pi}{n}\right)$$

En posant :

$$f(x) = x^2 \, sin(\pi\, x)$$

on reconnait la somme de Riemann suivante :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

dont la limite est :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \, sin(\pi\,x)\,dx$$

Faisons une intégration par partie en posant :

$$u(x) = x^2 \;\; ; \;\; v'(x) = sin(\pi\,x)$$

$$u'(x) = 2\,x\,; \quad v(x) = -\,\frac{cos(\pi\,x)}{\pi}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[-x^2\,\frac{cos(\pi\,x)}{\pi}\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\,cos(\pi\,x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\,cos(\pi\,x)\,dx$$

A nouveau, une intégration par partie en posant :

$$u(x) = x; \quad v'(x) = cos(\pi\,x)$$

$$u'(x) = 1\,; \quad v(x) = \frac{sin(\pi\,x)}{\pi}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left(\left[x\,\frac{sin(\pi\,x)}{\pi}\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 sin(\pi\,x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left[-\frac{cos(\pi\,x)}{\pi}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} = \frac{\pi - 4}{\pi^2}$$

<u>Enoncé 2</u>

a)

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = n^p \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p = n^{p+1} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p$$

On pose :

$$f(x) = x^p$$

Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k^p \sim n^{p+1}\int_0^1 f(x)\,dx = n^{p+1}\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{n^{p+1}}{p+1}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2\,k)^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3\,\left(1+2\,\frac{k}{n}\right)^3} = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{n}\,\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+2\,\frac{k}{n}\right)^3}$$

On pose :

$$f(x) = \frac{1}{(1+2\,x)^3}$$

Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2\,k)^3} \sim \frac{1}{n^2} \times \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{n^2}\left[\frac{(1+2\,x)^{-2}}{-4}\right]_0^1 = \frac{-1}{4\,n^2}\left(\frac{1}{9}-1\right) = \frac{2}{9\,n^2}$$

c)

$$\sum_{k=n+1}^{2\,n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+n)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2\,\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}\,\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$$

On pose :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Alors :

$$\sum_{k=n+1}^{2\,n} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n} \int_0^1 f(x)\,dx \;= \frac{1}{n}\left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2\,n}$$

d)

$$\sum_{k=1}^{n} Ln(k+n) = \sum_{k=1}^{n} \left(Ln(n) + Ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} Ln(n) + n \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$= n\,Ln(n) + n \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

On pose :

$$f(x) = Ln(1+x)$$

Alors :

$$n \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \sim n \int_{0}^{1} f(x)\, dx = n[(1+x)\, Ln(1+x) - (1+x)]_0^1 = (2\ln(2) - 1)\, n$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} Ln(k+n) \sim n\, Ln(n)$$