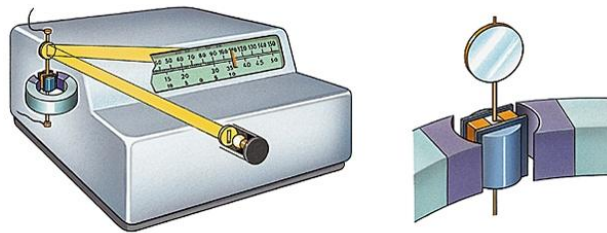


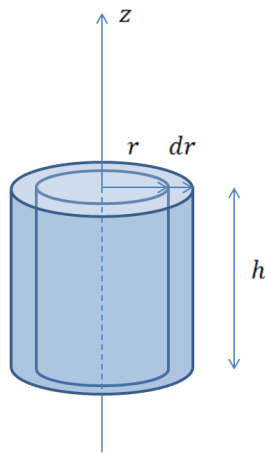
Galvanomètre balistique

Un galvanomètre balistique est un instrument permettant de mesurer la charge d'un condensateur. Il est constitué d'un cylindre pouvant tourner autour d'un axe fixe, sur lequel est fixée une bobine, plongée dans un champ magnétique radial et constant créé par un aimant permanent. La décharge génère un couple dû aux forces de Laplace agissant sur le cadre, lequel met en mouvement ce dernier, qui se met à osciller jusqu'à retrouver sa position d'équilibre.



Etude du dispositif

- 1) Calcul du moment d'inertie d'un cylindre autour de son axe de rotation



On rappelle que le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe est donné par la formule (d^3m désignant un élément volumique de masse)

$$J = \iiint_V r^2 d^3m$$

Le cylindre ayant un rayon R , une hauteur h et une masse m , cela donne, en notant que tous les points d'un cylindre de hauteur h et de rayon r sont à même distance de l'axe (voir figure ci-dessus) :

$$J = \int_{r=0}^R r^2 dm$$

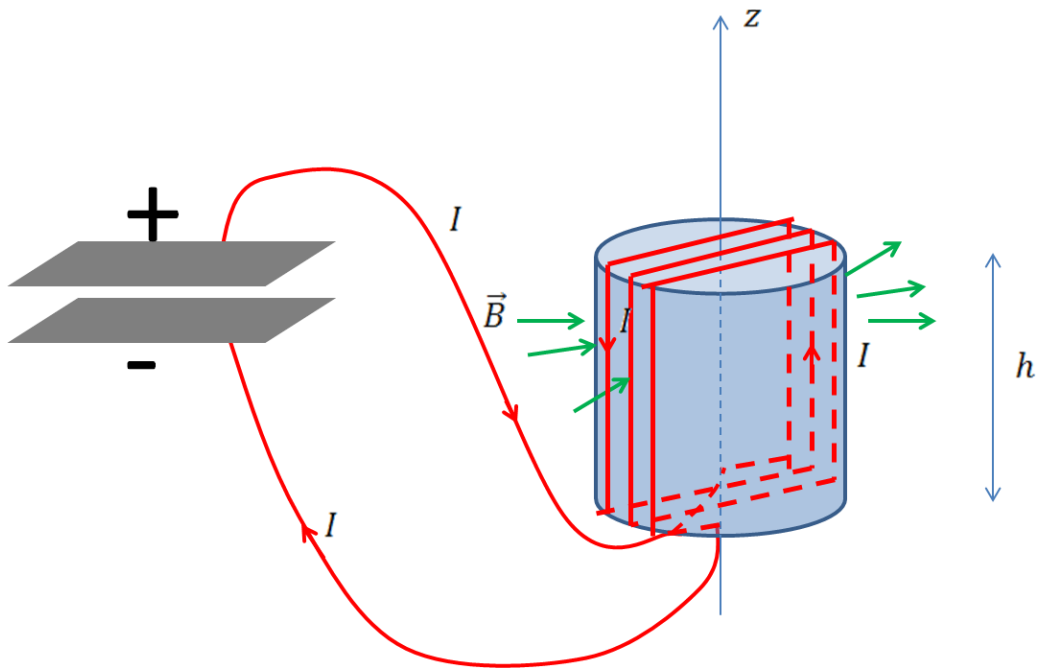
où dm désigne l'élément volumique de masse constitué par la portion de cylindre située entre les rayons r et $r + dr$, soit en introduisant la masse volumique ρ et le volume V du cylindre :

$$dm = \rho dV = \frac{m}{V} d(\pi r^2 h)$$

Questions :

- Exprimer dm en fonction de r, m, R
- En déduire J

2) Couple des forces de Laplace

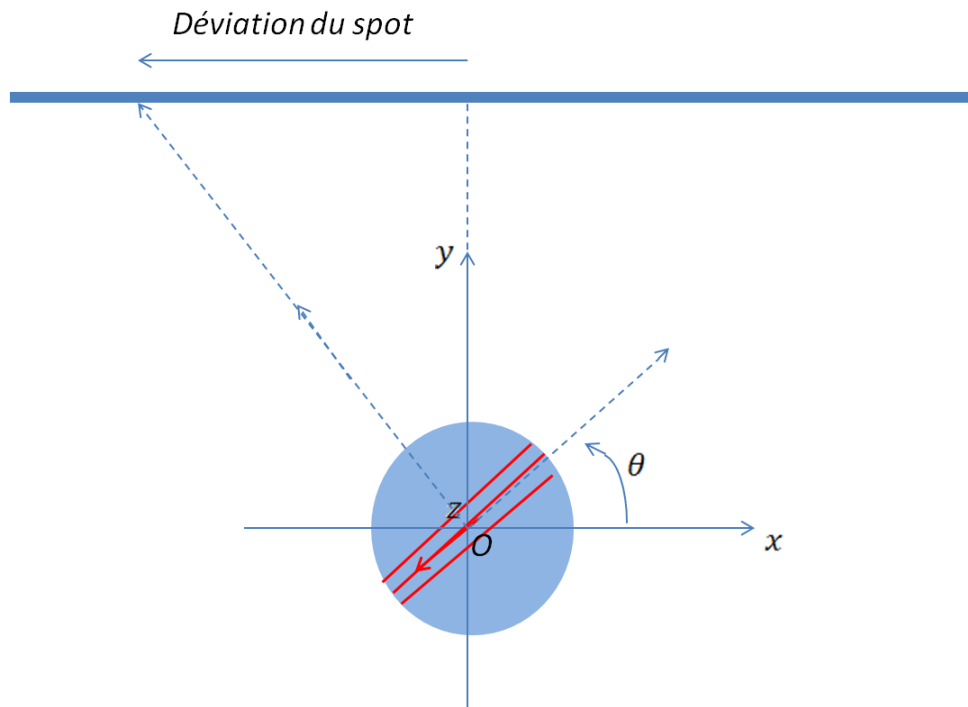


Questions :

- Faire un schéma en vue de dessus du cylindre faisant apparaître le champ magnétique et les forces de Laplace agissant sur deux portions verticales de conducteur symétriques par rapport à l'axe.
- En déduire le couple de forces de Laplace associé à une spire, puis celui C_L associé à N spires en fonction de N, R, h, I, B

3) Equation différentielle du mouvement :

On étudie le mouvement du cylindre repéré par l'angle orienté θ dont il a tourné, en définissant le repère d'étude de la figure ci-dessous :



Un ressort à spirale exerce un couple de rappel de constante de torsion C :

$$C_r = -C \theta$$

Les frottements exercent un couple de freinage :

$$C_f = -K \dot{\theta}$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors :

$$J \ddot{\theta} = C_r + C_f + C_L$$

Questions :

a) Normaliser l'équation, c'est-à-dire la mettre sous la forme mathématique :

$$\ddot{\theta} + 2 \alpha \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = b$$

On précisera α, ω_0, b en fonction des paramètres

b) Intégrer l'équation différentielle entre le début de la décharge pris comme origine des temps et l'instant τ très petit, où la décharge peut être considérée comme achevée. On fera l'hypothèse que θ n'a pas varié de façon significative pendant la

durée de décharge (on parle de décharge impulsive). En déduire une relation entre la charge du condensateur q et la vitesse angulaire acquise $\omega = \dot{\theta}(\tau)$ en fin de décharge

- c) En confondant τ avec 0 et en prenant pour conditions initiales : $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = \omega$ résoudre l'équation différentielle à partir de l'instant τ et déterminer ainsi le régime d'oscillations amorties.
- d) En déduire l'amplitude de première oscillation, c'est-à-dire la valeur maximale de θ correspondant à la déviation maximale du spot.
- e) En déduire que pour des caractéristiques fixées du galvanomètre, la charge du condensateur est proportionnelle à l'amplitude de première oscillation et qu'ainsi, la mesure de cette dernière conduit à la mesure de cette charge.

Corrigé

- 1) Etude du dispositif

a)

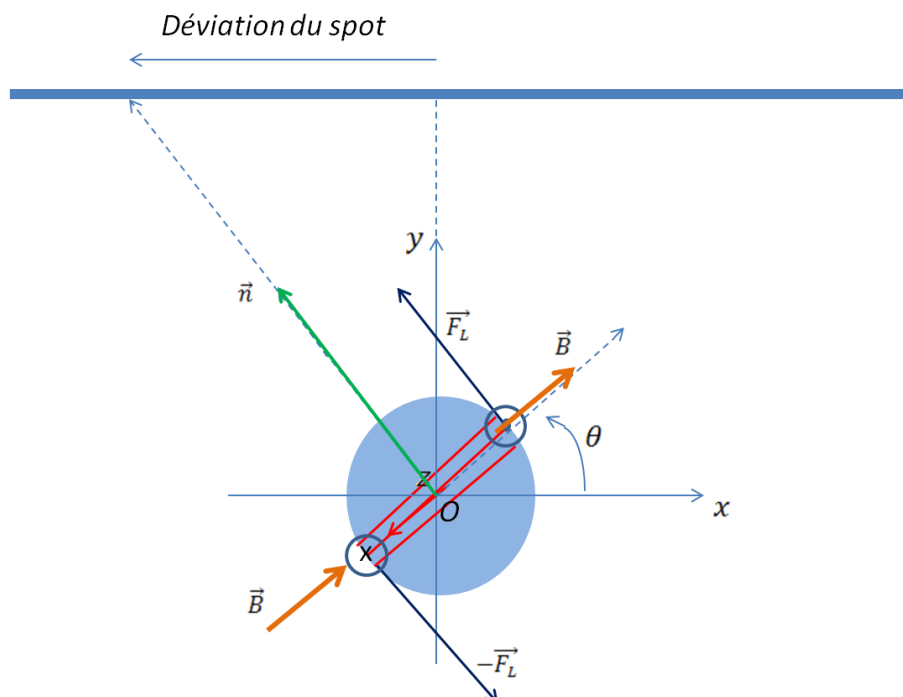
$$dm = \frac{m}{V} d(\pi r^2 h) = \frac{m}{\pi R^2 h} 2 \pi r h dr = \frac{2 m}{R^2} r dr$$

b)

$$J = \int_{r=0}^R r^2 dm = \int_{r=0}^R \frac{2 m}{R^2} r^3 dr = \frac{2 m}{R^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{m R^2}{2}$$

2)

- a) Couple de forces de Laplace



b) Chaque spire est soumise à un couple $(\vec{F}_L, -\vec{F}_L)$ de forces de Laplace où :

$$\vec{F}_L = I h \vec{k} \wedge \vec{B} = B I h \vec{n}$$

Ce couple a pour valeur :

$$C_{1L} = 2 B I h R = 2 B I h R$$

et pour N spires :

$C_L = 2 N B I h R$

3) Equation différentielle du mouvement

Ecrivons la relation traduisant la dynamique en rotation d'un solide autour d'un axe fixe :

$$J \ddot{\theta} = C_L - k \dot{\theta} - C \theta$$

soit en posant : $A = 2 N B h R$

$$J \ddot{\theta} + k \dot{\theta} + C \theta = A I$$

Intégrons cette relation entre les instants 0 et τ :

$$J \int_0^\tau \ddot{\theta}(t) dt + k \int_0^\tau \dot{\theta}(t) dt + C \int_0^\tau \theta(t) dt = A \int_0^\tau I(t) dt$$

$$J (\dot{\theta}(\tau) - \dot{\theta}(0)) + k (\theta(\tau) - \theta(0)) + C \int_0^\tau \theta(t) dt = A q$$

Or : $\dot{\theta}(0) = 0$, $\theta(\tau) - \theta(0)$ est négligeable de même que $\int_0^\tau \theta(t) dt$. Ainsi :

$\omega = \dot{\theta}(\tau) \approx \frac{A}{J} q$

c) Normalisons l'équation :

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{J} \dot{\theta} + \frac{C}{J} \theta = 0$$

Soit :

$$\ddot{\theta} + 2 \alpha \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

en posant :

$$\alpha = \frac{k}{2J}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$$

Nous avons une équation classique de solution générale :

$$\theta = e^{-\alpha t} (\lambda \cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t))$$

Déterminons les constantes à partir des conditions initiales :

$$\theta(0) = 0 \text{ donne : } \lambda = 0$$

donc :

$$\theta = \mu e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{\theta} = \mu e^{-\alpha t} (-\alpha \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \cos(\omega_0 t))$$

$\dot{\theta}(0) = \omega$ donne :

$$\omega = \mu \omega_0$$

soit :

$$\mu = \frac{\omega}{\omega_0}$$

d'où :

$$\theta = \frac{\omega}{\omega_0} e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)$$

Nous sommes en présence d'un mouvement pseudo-périodique amorti de pseudo période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$$

d) L'effet d'amortissement pouvant être négligé sur la première oscillation, l'amplitude de première oscillation est :

$$\theta_0 \approx \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{A}{J} q \sqrt{\frac{J}{C}}$$

Soit :

$$q = \frac{\sqrt{J} \sqrt{C}}{A} \theta_0 = \frac{\sqrt{C} T_0 \sqrt{C}}{2 \pi A} \theta_0$$

Finalement :

$$q = k T_0 \theta_0$$

avec :

$$k = \frac{C}{2 \pi A}$$

La charge q est donc proportionnelle à θ_0