Enoncé 1 :

1) Justifier l'égalité en précisant le domaine de validité :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, x^k + \frac{(-1)^{n+1} \, x^{n+1}}{1+x}$$

2) En déduire, par une intégration convenablement choisie, une expression simplifiée de :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

3) En déduire, sans invoquer le théorème des séries alternées, que la série précédente converge et déterminer :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Enoncé 2 :

Adapter la méthode précédente pour déterminer :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k+1}$$

Puis

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3\,k+1}$$

(on calculera l'expression intégrale)

Et généraliser, pour p entier naturel non nul, à :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{p\,k+1}$$

Corrigé :

Enoncé 1 :

1) On applique le résultat concernant la somme des n + 1 premiers termes d'une suite géométrique de raison $-x$ avec $x \neq -1$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$$

2) On intègre sur l'intervalle $[0,1]$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k\, x^k\ dx + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}}{1+x}\, dx$$

$$[Ln(1+x)]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^k\ \frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}}{1+x}\, dx$$

$$Ln(2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} + R_n$$

où :

$$|R_n| = \left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}}{1+x}\ dx\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}}{1+x}\right|\ dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\ dx \leq \int_0^1 x^{n+1}\ dx = \frac{1}{n+2}$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$$

3) On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = Ln(2)$$

Enoncé 2 :

La méthode s'adapte en remplaçant x par x^2 :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^{2\,k} = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ dx = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k\, x^{2k}\ dx + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}\, x^{2n+2}}{1+x}\ dx$$

$$[Atan(x)]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^k\ \frac{x^{2\,k+1}}{2\,k+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}\, x^{2n+2}}{1+x}\ dx$$

$$Atan(2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2\,k+1} + R_n$$

où :

$$|R_n| = \left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}\,x^{2\,n+2}}{1+x}\,dx\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{(-1)^{n+1}\,x^{2\,n+2}}{1+x}\right|\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2\,n+2}}{1+x}\,dx \leq \int_0^1 x^{2\,n+2}\,dx = \frac{1}{2\,n+3}$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$$

Et :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k+1} = Atan(1)}$$

En remplaçant x par x^3, la méthode conduit à :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx}$$

Une décomposition en éléments simples conduit alors à :

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{\frac{1}{2}(2\,x-1) - \frac{3}{2}}{x^2-x+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{2\,x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right)$$

Et :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx = \left[\frac{1}{3}\left(Ln(x+1) - \frac{1}{2}\,Ln(x^2-x+1) + \frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}}\,Atan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left(Ln(2) + \sqrt{3}\,\left(Atan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - Atan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right) = \frac{1}{3}\left(Ln(2) + 2\sqrt{3}\,Atan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

Et on généralise sous forme :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{p\,k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^p}\,dx}$$