**<u>Somme de l'inverse des carrés des entiers consécutifs : deuxième démonstration</u>**

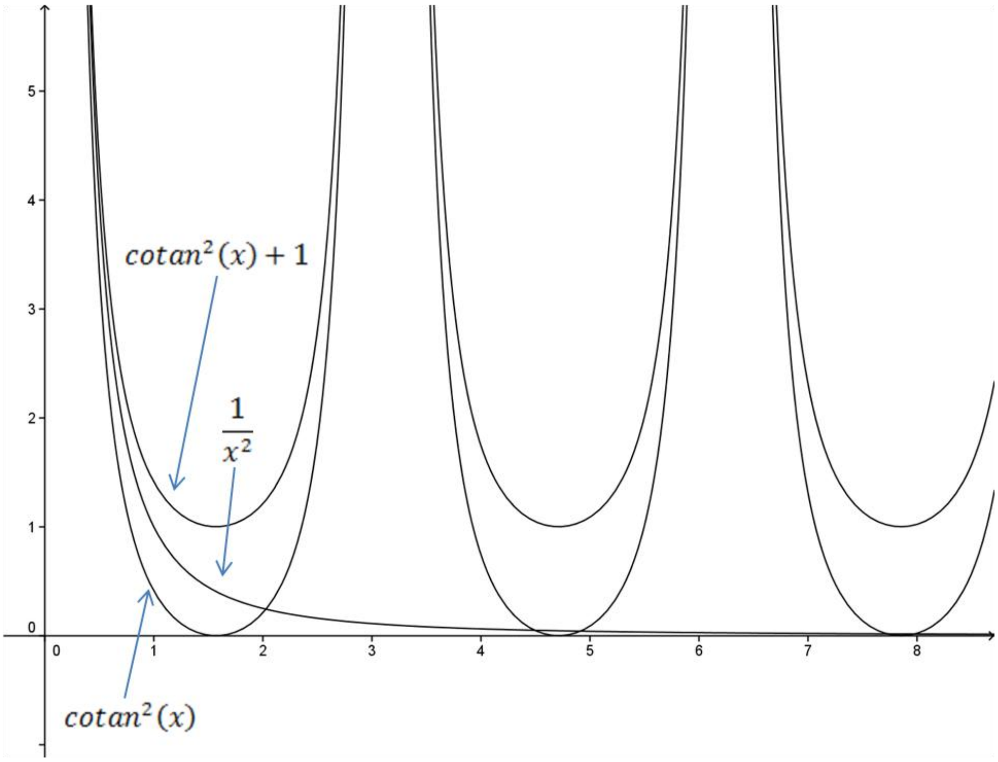
**Le but de l'exercice est le calcul de la somme :**

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

a) **Donner un équivalent simple de $Tan(x)$ en 0 et en déduire un équivalent de $\frac{1}{x^2}$ toujours en 0.**

b) **Prouver, comme le suggère le tracé des courbes ci-dessous, que l'on a :**

$$\forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ : \quad cotan^2(x) < \frac{1}{x^2} < cotan^2(x) + 1$$




c) **Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme $P_m$ de degré $m$ et l'expliciter, tel que :**

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z} : \ sin\big((2\,m+1)\,t\big) = sin^{2\,m+1}(t)\, P_m\left(cotan^2(t)\right)$$

d) **Montrer que l'équation $sin\big((2\,m+1)\,t\big) = 0$ admet sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ $m$ solutions distinctes $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ en les explicitant et en déduire la valeur de :**

$$\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{cotan^2(t_k)}$$

e) **En déduire la valeur de**

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k^2}}$$

<u>Solution</u>

a) On a en 0 :

$$Tan(x) \sim x$$

donc :

$$\frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{Tan^2(x)} = cotan^2(x)$$

b) Notons que :

$$cotan^2(x) + 1 = \frac{cos^2(x)}{sin^2(x)} + 1 = \frac{cos^2(x)}{sin^2(x)} + \frac{sin^2(x)}{sin^2(x)} = \frac{1}{sin^2(x)}$$

Or sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ :

$$0 < sin(x) < x$$

Donc :

$$0 < sin^2(x) < x^2$$

$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{sin^2(x)}$$

Ce qui prouve l'inégalité de droite. Voyons celle de gauche.

sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ :

$$x < Tan(x)$$

Donc :

$$x^2 < Tan^2(x)$$

$$\frac{1}{Tan^2(x)} < \frac{1}{x^2}$$

Nous avons bien l'encadrement cherché.

c) Considérons le complexe

$$e^{i\,(2\,m+1)\,t} = \left(e^{i\,t}\right)^{2\,m+1} = \left(cos(t) + i\,sin(t)\right)^{2\,m+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{2\,m+1} \binom{2\,m+1}{k} \left(i\,sin(t)\right)^k cos^{2\,m+1-k}(t)$$

En en prenant la partie imaginaire ( c'est-à-dire en ne conservant que les valeurs de $k$ impaires dans la somme), il vient :

$$sin\big((2\,m+1)\,t\big) = \sum_{q=0}^{m} \binom{2\,m+1}{2\,q+1} (-1)^q\, sin^{2\,q+1}(t)\, cos^{2\,m+1-(2\,q+1)}(t)$$

$$= \sum_{q=0}^{m} \binom{2\,m+1}{2\,q+1} (-1)^q sin^{2\,q+1}(t)\, cos^{2\,(m-q)}(t)$$

$$= \sum_{q=0}^{m} \binom{2\,m+1}{2\,q+1} (-1)^q\, sin^{2\,q+1}(t)\, \left(cos^2\,(t)\right)^{m-q}$$

$$= \sum_{q=0}^{m} \binom{2\,m+1}{2\,q+1} (-1)^q\, sin^{2\,q+1}(t)\, (sin^2\,(t)\, cotan^2(t)\,)^{m-q}$$

$$= \; sin^{2\,m+1}(t) \sum_{q=0}^{m} \binom{2\,m+1}{2\,q+1} (-1)^q\, (\,cotan^2(t)\,)^{m-q}$$

$$= \; sin^{2\,m+1}(t)\, P_m\big(cotan^2(t)\big)$$

où on a posé :

$$P_m(X) = \sum_{q=0}^{m} \binom{2\,m+1}{2\,q+1} (-1)^q\, X^{m-q}$$

A noter que $P_m$ est de degré $m$ et que ses deux plus hauts coefficients sont :

$$a_m = \binom{2\,m+1}{1} = 2\,m+1$$

$$a_{m-1} = -\binom{2\,m+1}{3} = -\frac{(2\,m+1)\,(2\,m)\,(2\,m-1)}{3\times 2}$$

$$= \frac{m\,(2\,m+1)\,(2\,m-1)}{3}$$

d) On a :

$$\begin{cases} sin\big((2\,m+1)\,t\big) = 0 \\ 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{Z} :\ (2\,m+1)\,t = k\,\pi \\ 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{Z} :\ \ t = \dfrac{k\,\pi}{2\,m+1} \\ 0 < \dfrac{k\,\pi}{2\,m+1} < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{Z} :\ \ t = \dfrac{k\,\pi}{2\,m+1} \\ 0 < k < \dfrac{2\,m+1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{Z} :\ \ t = \dfrac{k\,\pi}{2\,m+1} \\ 1 \le k \le m \end{cases}$$

L'équation a donc bien $m$ racines distinctes :

$$t_k = \frac{k\,\pi}{2\,m+1}, k = 1 \text{ à } m$$

En remplaçant dans la relation initiale on a pour tout $k \in [\![1;m]\!]$ :

$$0 = sin\big((2\,m+1)\,t_k\big) = sin^{2\,m+1}(t_k)\,P_m\big(cotan^2(t_k)\big)$$

Or $t_k \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc :

$$sin^{2\,m+1}(t_k) \neq 0$$

d'où :

$$P_m\big(cotan^2(t_k)\big) = 0$$

$cotan^2(t_k)$ est donc racine de $P_m$.

De plus $cotan^2(x)$ étant strictement décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, les $m$ valeurs $\lambda_k = cotan^2(t_k)$ sont distinctes deux à deux donc forment les racines de $P_m$ qui s'écrit :

$$P_m(X) = a_m\,(X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_m) = a_m\,X^m - a_m\,(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)\,X^{m-1} + \cdots$$

On en déduit :

$$a_{m-1} = -a_m\,(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)$$

Soit :

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = -\frac{a_{m-1}}{a_m} = \frac{m\,(2\,m+1)\,(2\,m-1)}{3}\,\frac{1}{2\,m+1} = \frac{m\ (2\,m-1)}{3}$$

D’où :

$$\sum_{k=1}^{m} cotan^2(t_k) = \frac{m\ (2\,m-1)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{m} cotan^2\left(\frac{k\,\pi}{2\,m+1}\right) = \frac{m\ (2\,m-1)}{3}$$

e) Appliquons l’encadrement du b) :

$$\sum_{k=1}^{m} cotan^2\left(\frac{k\,\pi}{2\,m+1}\right) < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\left(\frac{k\,\pi}{2\,m+1}\right)^2} < \sum_{k=1}^{m}\left(cotan^2\left(\frac{k\,\pi}{2\,m+1}\right)+1\right)$$

$$\frac{m\ (2\,m-1)}{3} < \frac{(2\,m+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} < \frac{m\ (2\,m-1)}{3} + m$$

$$\frac{m\ (2\,m-1)}{3}\,\frac{\pi^2}{(2\,m+1)^2} < \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} < \left(\frac{m\ (2\,m-1)}{3} + m\right)\frac{\pi^2}{(2\,m+1)^2}$$

La quantité minorante et la quantité majorante sont chacune équivalente à $\pi^2/6$ donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$