Séries numériques-Comparaison intégrale et équivalents

<u>Exercice 1</u> :

Donner un équivalent de la suite

$$\boldsymbol{V_n = \sum_{k=2}^{n}\left(k^{\frac{1}{k}} - 1\right)}$$

<u>Solution</u> :

Posons :

$$U_k = k^{\frac{1}{k}} - 1 = e^{\frac{1}{k}Ln(k)} - 1$$

On a :

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\,Ln(k) = 0$$

Rappelons le développement limité à l'ordre 2 de e^x en 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

On en déduit :

$$U_k = \frac{1}{k}\,Ln(k) + \left(\frac{1}{k}\,Ln(k)\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\,Ln(k)\right)^2 \varepsilon(k)$$

avec :

$$\lim_{k\to+\infty}\varepsilon(k) = 0$$

La série de terme général $\frac{1}{k}\,Ln(k)$ est une série de Bertrand qui tend vers $+\infty$. La série de terme général $\left(\frac{1}{k}\,Ln(k)\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\,Ln(k)\right)^2 \varepsilon(k)$ est une série convergente car son terme général équivaut à $\left(\frac{1}{k}\,Ln(k)\right)^2$ qui est le terme général d'une série de Bertrand convergente. On en déduit :

$$\sum_{k=2}^{n} U_k \sim \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\,Ln(k)$$

Et d'après le théorème de comparaison à l'intégrale :

$$\sum_{k=2}^{n} U_k \sim \int_{2}^{n} \frac{1}{x} \, Ln(x) \, dx$$

Or :

$$\int_{2}^{n} \frac{1}{x} \, Ln(x) \, dx = \left[Ln\big(Ln(x)\big)\right]_2^n = Ln\big(Ln(n)\big) - Ln\big(Ln(2)\big)$$

D’où :

$$\sum_{k=2}^{n} U_k \sim Ln\big(Ln(n)\big)$$