Séries numériques-Comparaison et équivalents

<u>Exercice 1</u> :

Etudier, pour $\boldsymbol{\alpha > 0}$, la convergence de la série de terme général :

$$\boldsymbol{U_n = \int_{n}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^{\alpha}}}}$$

<u>Solution</u> :

Nous avons sur $[1;+\infty[$:

$$t^{\alpha} \geq 1$$

donc en majorant et minorant le dénominateur :

$$\frac{1}{\sqrt{t^{\alpha}+t^{\alpha}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^{\alpha}}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^{\alpha}}}$$

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{n}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2\,t^{\alpha}}} \leq \int_{n}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^{\alpha}}} \leq \int_{n}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^{\alpha}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{n}^{n+\frac{1}{2}} t^{-\frac{\alpha}{2}}\,dt \leq U_n \leq \int_{n}^{n+\frac{1}{2}} t^{-\frac{\alpha}{2}}\,dt$$

Posons :

$$V_n = \int_{n}^{n+\frac{1}{2}} t^{-\frac{\alpha}{2}}\,dt$$

Alors, pour $\alpha \neq 2$:

$$V_n = \left[\frac{t^{-\frac{\alpha}{2}+1}}{-\frac{\alpha}{2}+1}\right]_{n}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{-\frac{\alpha}{2}+1}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}+1} - n^{-\frac{\alpha}{2}+1}\right)$$

$$= \frac{n^{-\frac{\alpha}{2}+1}}{-\frac{\alpha}{2}+1}\left(\left(1+\frac{1}{2\,n}\right)^{-\frac{\alpha}{2}+1}-1\right)$$

Rappelons que pour tout réel $\beta \neq 0$, on a au voisinage de 0 :

$$(1+x)^{\beta}-1 \sim \beta\, x$$

Ainsi, en $+\infty$:

$$V_n \sim \frac{n^{-\frac{\alpha}{2}+1}}{-\frac{\alpha}{2}+1}\ \left(-\frac{\alpha}{2}+1\right)\frac{1}{2\,n} \sim \frac{1}{2\,n^{\frac{\alpha}{2}}}$$

Donc :

pour $\alpha > 2$ la série de terme général V_n converge et comme on a $U_n \leq V_n$, par comparaison, la série de terme général U_n à termes strictement positifs converge.

pour $0 < \alpha < 2$ la série de terme général V_n tend vers $+\infty$ et comme on a $\frac{1}{\sqrt{2}}V_n \leq U_n$, par comparaison, la série de terme général U_n à termes strictement positifs tend vers $+\infty$

Reste à étudier le cas $\alpha = 2$ de façon plus directe :

$$U_n = \int_{n}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \left[Ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_n^{n+\frac{1}{2}} = Ln\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}}{n+\sqrt{1+n^2}}\right)$$

Rappelons que l'on a en 1 :

$$Ln(x) \sim (x-1)$$

Or en $+\infty$:

$$\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}}{n+\sqrt{1+n^2}} \sim \frac{2\,n}{2\,n} \sim 1$$

Donc :

$$U_n \sim \left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}}{n+\sqrt{1+n^2}}-1\right)$$

$$U_n \sim \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}-n-\sqrt{1+n^2}}{n+\sqrt{1+n^2}}$$

$$U_n \sim \frac{\frac{1}{2}+\sqrt{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}-\sqrt{1+n^2}}{2\,n}$$

$$U_n \sim \frac{\frac{1}{2}+\frac{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-(1+n^2)}{\sqrt{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{1+n^2}}}{2\,n}$$

$$U_n \sim \frac{\frac{1}{2}+\frac{n+\frac{1}{4}}{\sqrt{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{1+n^2}}}{2\,n}$$

$$U_n \sim \frac{1}{2\,n}$$

Donc la série de terme général U_n tend vers $+\infty$