

Partie I : Préliminaires

Soit φ une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = +\infty$$

On considère, pour $q \in \mathbb{R}^*$, la suite :

$$U_n = q^{\varphi(n)}$$

a) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \Leftrightarrow |q| < 1$$

b). Déterminer un réel $0 < q < 1$ et une fonction φ pour laquelle la série de terme général $U_n = q^{\varphi(n)}$ converge et une pour laquelle la série diverge.

c) On suppose que φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer :

$$\sum q^{\varphi(n)} \text{ converge} \Leftrightarrow |q| < 1$$

Partie II : Séries entières généralisées

On suppose encore φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et on considère la série de fonction :

$$\sum a_n x^{\varphi(n)}$$

On considère l'ensemble :

$$J = \left\{ r \in [0, +\infty[: \sum |a_n| r^{\varphi(n)} \text{ converge} \right\}$$

a) Justifier que J n'est pas vide. On notera alors dans la suite :

$$R = \sup(J)$$

b) Montrer que J est un intervalle contenant $[0, R[$ et donc que la série $\sum a_n x^{\varphi(n)}$ est absolument convergente sur $] -R, R[$

c) Dans le cas où $R \neq +\infty$, montrer que la série $\sum a_n x^{\varphi(n)}$ diverge trivialement sur $]R, +\infty[$

On qualifiera R de rayon de convergence de la série $\sum a_n x^{\varphi(n)}$

d) On considère sur $] -R, R[$, la fonction :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{\varphi(n)}$$

Montrer que la série associée est normalement convergente sur tout intervalle $[-r, r]$ où $r > 0$ contenu dans $] -R, R[$ et en déduire que la fonction S est de classe C_∞ sur $[-r, r]$ puis donner l'expression de sa dérivée.

Partie III : Applications

Donner les rayons de convergence des séries entières généralisées suivantes :

$$a) \sum a^{n^2} x^{1+2+\dots+n} \text{ où } a \in \mathbb{R}^* \quad b) \sum n! x^{n^2} \quad c) \sum a^n x^{n!} \text{ où } a \in \mathbb{R}^*$$

Corrigé :

Partie I :

a) si

$$|U_n| = |q|^{\varphi(n)} = e^{\varphi(n) \operatorname{Ln}(|q|)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ln}(|q|) < 0 \Leftrightarrow |q| < 1$$

b) cas de convergence de la série

$$\varphi(n) = n$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Cas de divergence de la série :

$$\varphi(n) = \operatorname{Ln}(n)$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{Ln}(n)} = \frac{1}{2^{\operatorname{Ln}(n)}} = \frac{1}{e^{\operatorname{Ln}(n) \operatorname{Ln}(2)}} = \frac{1}{n^{\operatorname{Ln}(2)}}$$

c) Notons par récurrence triviale :

φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n) \geq n$

Ainsi :

$$|q| < 1 \Rightarrow \operatorname{Ln} |q| < 0 \Rightarrow \varphi(n) \operatorname{Ln} |q| \leq n \operatorname{Ln} |q| \Rightarrow e^{\varphi(n) \operatorname{Ln} |q|} \leq e^{n \operatorname{Ln} |q|}$$

$$\Rightarrow |q|^{\varphi(n)} \leq |q|^n \Rightarrow |q^{\varphi(n)}| \leq |q|^n$$

Donc, si $|q| < 1$, par comparaison, $\sum q^{\varphi(n)}$ est absolument convergente.

Si $|q| \geq 1$, $\sum q^{\varphi(n)}$ diverge trivialement car $|q|^{\varphi(n)}$ ne tend pas vers 0 d'après a)

Partie II :

a) $0 \in J$ donc J n'est pas vide

b) Distinguons deux cas :

1^{er} cas : J est réduit au seul élément 0 auquel cas c'est un intervalle et $R = 0$

2^{ème} cas : J n'est pas réduit au seul élément 0 soit $R > 0$. Alors :

Soit $r \in [0, R[$ alors :

$$\exists r_1 \in J \cap]r, R[$$

Donc $\sum |a_n| r_1^{\varphi(n)}$ converge. Or :

$$|a_n| r^{\varphi(n)} \leq |a_n| r_1^{\varphi(n)}$$

Donc, par comparaison, $\sum |a_n| r^{\varphi(n)}$ converge et donc $r \in J$. J contient donc l'intervalle $[0, R[$.

c) Soit $r \in]R, +\infty[$ alors supposons par l'absurde que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| r^{\varphi(n)} = 0$$

En particulier, cette dernière suite serait bornée. Donc :

$$\exists M \in]0, +\infty[: \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| r^{\varphi(n)} \leq M$$

Soit alors : $r_1 \in [0, r[$:

$$|a_n| r_1^{\varphi(n)} = |a_n| r^{\varphi(n)} \frac{r_1^{\varphi(n)}}{r^{\varphi(n)}} \leq M \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\varphi(n)}$$

Par comparaison, la série $\sum |a_n| r_1^{\varphi(n)}$ converge donc $[0, r[\subset J$ donc $r \leq R$ ce qui est contradictoire.

La série $\sum a_n r^{\varphi(n)}$ diverge donc trivialement. On en déduit que la série $\sum a_n x^{\varphi(n)}$ diverge trivialement si $|x| > r$.

d)

Soit $r \in]0, R[$ et $x \in [-r, r]$ alors :

$$|a_n x^{\varphi(n)}| \leq |a_n| r^{\varphi(n)}$$

La convergence de la série est donc normale sur $[-r, r]$. Chaque terme étant $a_n x^{\varphi(n)}$ étant une fonction de la variable x de classe C_∞ sur $[-r, r]$, S est donc de classe C_∞ sur $[-r, r]$ donc sur $] -R, R[$ et :

Si $\varphi(0) = 0$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi(n) x^{\varphi(n)-1}$$

Si $\varphi(0) \neq 0$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(n) x^{\varphi(n)-1}$$

Partie III :

a) Posons pour $r \in [0, +\infty[$:

$$U_n = |a|^{n^2} r^{1+2+\dots+n}$$

Alors :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{|a|^{(n+1)^2} r^{1+2+\dots+n+(n+1)}}{|a|^{n^2} r^{1+2+\dots+n}} = |a|^{2n+1} r^{n+1} = |a| (|a| r)^{2n+1}$$

Donc :

Si $|a| r < 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0$$

Et la série , $\sum U_n$ converge

Si $|a| r > 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = +\infty$$

Et la série , $\sum U_n$ diverge.

D'où :

$$R = \frac{1}{|a|}$$

b)) Posons pour $r \in [0, +\infty[$:

$$U_n = n! r^{n^2}$$

Alors :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)! r^{(n+1)^2}}{n! r^{n^2}} = (n+1) r^{2n+1} = |a| (|a| r)^{2n+1}$$

Donc :

Si $r < 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0$$

Et la série , $\sum U_n$ converge

Si $r > 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = +\infty$$

Et la série , $\sum U_n$ diverge.

D'où :

$$R = 1$$

c) Posons pour $r \in [0, +\infty[$:

$$U_n = |a^n| r^{n!}$$

Alors :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{|a^{n+1}| r^{(n+1)!}}{|a^n| r^{n!}} = |a| r^{n n!}$$

Donc :

Si $r < 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0$$

Et la série , $\sum U_n$ converge

Si $r > 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = +\infty$$

Et la série , $\sum U_n$ diverge.

D'où :

$$R = 1$$

Remarque : Si on regarde cette série comme une série entière de la variable a et non plus z de rayon de convergence R_a , alors il en va autrement :

$$|z| < 1 \Rightarrow R_a = +\infty$$

$$|z| > 1 \Rightarrow R_a = 0$$

$$|z| = 1 \Rightarrow R_a = 1$$