<u>Enoncé</u> :

On considère pour $a \in]1, e[$ l'équation :

$$a^x = x + 1$$

1) Montrer que cette équation admet une unique solution x_a sur $\mathbb{R}^*$.

2) On considère la fonction f définie sur $]1, e[$ par :

$$f(a) = x_a$$

a) Exprimer f à l'aide de la réciproque d'une fonction qui s'exprime à partir de fonctions de référence.

b) En déduire le sens de variation de f ainsi que les limites de f en 1 et en e

<u>Solution</u>

Sur $]-\infty, -1]$ l'équation n'a pas de solution car : $x + 1 \leq 0$, $a^x > 0$

Sur $]-1, +\infty[$ posons :

$$g(x) = a^x - x - 1$$

Alors :

$$g'(x) = Ln(a)\, a^x - 1$$

Et :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow a^x = \frac{1}{Ln(a)} \Leftrightarrow e^{x\, Ln(a)} = \frac{1}{Ln(a)} \Leftrightarrow x\, Ln(a) = -Ln\big(Ln(a)\big)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{Ln\big(Ln(a)\big)}{Ln(a)} = \alpha_a$$

De plus :

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, \alpha_a[$$

Ainsi, g est strictement décroissante sur $]-1, \alpha_a[$ puis strictement croissante sur $]\alpha_a, +\infty[$.

Or :

$$\alpha_a > 0$$

Et :

$$g(0) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

Donc l'équation n'a pas de solution sur $]-1, \alpha_a[$ et une unique solution sur $]\alpha_a, +\infty[$

2a) Sur $]0,+\infty[$ l'équation équivaut à :

$$Ln(a^x) = Ln(x+1)$$

$$\Leftrightarrow\ x\,Ln(a) = Ln(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{Ln(x+1)}{x} = Ln(a)$$

Posons alors sur $]0,+\infty[$

$$h(x) = \frac{Ln(x+1)}{x}$$

$$h'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - Ln(x+1)}{x^2}$$

$h'(x)$ est du signe de la fonction :

$$m(x) = \frac{x}{x+1} - Ln(x+1)$$

$$m'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x}{(x+1)^2} < 0$$

$$\lim_{x\to 0} m(x) = 0$$

Donc $m < 0$ sur $]0,+\infty[$ et $h' < 0$ sur $]0,+\infty[$. Ainsi h est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. De plus :

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = 0$$

Donc h définit une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]0,1[$. Or :

$$Ln(a) \in\ ]0,1[$$

On retrouve le fait que l'équation $h(x) = Ln(a)$ admet une solution unique sur $]0,+\infty[$ qui s'exprime comme étant :

$$\boxed{x_a = f(a) = h^{-1}\big(Ln(a)\big)}$$

2b)

h^{-1} étant strictement croissante sur $]0,1[$ et Ln strictement croissante sur $]1,e[$ la fonction f est donc par composée strictement croissante sur $]1,e[$. De plus :

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{a\to 1} f(a) = \lim\limits_{t\to 0} h^{-1}(t) = +\infty \\ \lim\limits_{a\to e} f(a) = \lim\limits_{t\to 1} h^{-1}(t) = 0\end{array}}$$