

Enoncé :

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de $\mathbb{E}$. Montrer que les trois assertions sont équivalentes :

1) $rg(f + g) = rg(f) + rg(g)$

2) $Im(f + g) = Im(f) \oplus Im(g), Ker(f + g) = Ker(f) \cap Ker(g)$

3) $Im(f) \cap Im(g) = \{0\}, Ker(f) + Ker(g) = \mathbb{E}$

Trouver deux exemples pour lesquels l'assertion 1) est vérifiée, un pour lequel :

$$Ker(f) \cap Ker(g) \neq \{0\}$$

et un autre pour lequel :

$$Ker(f) \cap Ker(g) = \{0\}$$

Réponse :

préliminaires:

$$Im(f + g) \subset Im(f) + Im(g)$$

$$Dim(Im(f + g)) \leq Dim(Im(f) + Im(g))$$

Preuve :

Soit $y \in Im(f + g)$ alors $\exists x \in \mathbb{E} : y = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ donc $y \in Im(f) + Im(g)$

$$\text{Si } Im(f) \cap Im(g) = \{0\} \text{ alors : } Ker(f + g) = Ker(f) \cap Ker(g)$$

Preuve :

Soit $x \in Ker(f + g)$ alors $f(x) + g(x) = 0$.

Or $f(x) \in Im(f), g(x) \in Im(g)$ donc : $f(x) = g(x) = 0$ et donc $x \in Ker(f) \cap Ker(g)$.

Réciproquement :

Soit $x \in Ker(f) \cap Ker(g)$ alors $f(x) = g(x) = 0$ donc $f(x) + g(x) = 0$ donc $x \in Ker(f + g)$

1) $\Rightarrow$ 2)

On suppose $rg(f + g) = rg(f) + rg(g)$ alors

$$Dim(Im(f + g)) \leq Dim(Im(f)) + Dim(Im(g)) - Dim(Im(f) \cap Im(g))$$

$$rg(f + g) \leq rg(f) + rg(g) - Dim(Im(f) \cap Im(g))$$

Donc :

$$Dim(Im(f) \cap Im(g)) \leq 0$$

D'où :

$$\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$$

Ainsi :

$$\text{Dim}(\text{Im}(f + g)) = \text{Dim}(\text{Im}(f) + \text{Im}(g)) = \text{Dim}(\text{Im}(f)) + \text{Dim}(\text{Im}(g))$$

Et :

$$\text{Im}(f + g) = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)$$

En utilisant le second préliminaire :

$$\text{Ker}(f + g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$$

2) $\Rightarrow$ 3 on a :

$$\text{Dim}(\text{Im}(f + g)) = \text{Dim}(\text{Im}(f)) + \text{Dim}(\text{Im}(g))$$

$$\text{Dim}(\text{Ker}(f + g)) = \text{Dim}(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g))$$

Donc par addition :

$$\text{Dim}(\text{Im}(f + g)) + \text{Dim}(\text{Ker}(f + g)) = \text{Dim}(\text{Im}(f)) + \text{Dim}(\text{Im}(g)) + \text{Dim}(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g))$$

$$\text{Dim}(\mathbb{E}) = \text{Dim}(\mathbb{E}) - \text{Dim}(\text{Ker}(f)) + \text{Dim}(\mathbb{E}) - \text{Dim}(\text{Ker}(g)) + \text{Dim}(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g))$$

Donc :

$$\text{Dim}(\text{Ker}(f)) + \text{Dim}(\text{Ker}(g)) - \text{Dim}(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)) = \text{Dim}(\mathbb{E})$$

Soit :

$$\text{Dim}(\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)) = \text{Dim}(\mathbb{E})$$

Et

$$\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = \mathbb{E}$$

3) $\Rightarrow$ 1) On suppose $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$ et $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = \mathbb{E}$

D'après le préliminaire :

$$\text{Ker}(f + g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$$

Ainsi :

$$\text{Dim}(\text{Ker}(f + g)) = \text{Dim}(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g))$$

$$\text{Dim}(\mathbb{E}) - \text{Dim}(\text{Im}(f + g)) = \text{Dim}(\text{Ker}(f)) + \text{Dim}(\text{Ker}(g)) - \text{Dim}(\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g))$$

$$\text{Dim}(\mathbb{E}) - \text{rg}(f + g) = \text{Dim}(\mathbb{E}) - \text{rg}(f) + \text{Dim}(\mathbb{E}) - \text{rg}(g) - \text{Dim}(\mathbb{E})$$

D'où :

$$\text{rg}(f + g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

Un premier exemple :

Considérons $\mathbb{E} = \mathbb{R}_{col}^3$ l'espace vectoriel des colonnes à trois éléments réels et considérons les deux endomorphismes f et g dont les matrices dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) sont respectivement :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de $f + g$ est alors :

$$F + G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc bien :

$$rg(f + g) = rg(f) + rg(g)$$

et :

$$Ker(f) = Vect[e_2, e_3]$$

$$Ker(g) = Vect[e_1, e_3]$$

$$Ker(f) \cap Ker(g) = Vect[e_3] \neq \{0\}$$

Un second exemple :

En modifiant l'exemple précédent comme suit :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de $f + g$ est alors :

$$F + G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc bien :

$$rg(f + g) = rg(f) + rg(g)$$

et :

$$Ker(f) = Vect[e_3]$$

$$Ker(g) = Vect[e_1, e_2]$$

$$Ker(f) \cap Ker(g) = \{0\}$$

