Algorithme de calcul d'une racine carrée

Il est proposé dans cet exercice un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée d'une racine à une précision choisie à l'avance

Soit le schéma de récurrence d'ordre 1 suivant, pour un réel $\boldsymbol{a > 0}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{a}{U_n}\right)} \\ \boldsymbol{U_0 > 0} \end{cases}$$

1) **Montrer que $\boldsymbol{U_n}$ est strictement décroissante au rang 1 et converge vers $\boldsymbol{\sqrt{a}}$**
2) **Etablir une majoration de $\boldsymbol{U_{n+1} - \sqrt{a}}$ par une expression en $\boldsymbol{U_n - \sqrt{a}}$**
3) **En déduire une majoration de $\boldsymbol{U_n - \sqrt{a}}$ par une suite explicite tendant vers 0**
4) **$\boldsymbol{p}$ étant un entier naturel, en déduire en fonction de $\boldsymbol{p}$ un rang optimal à partir duquel on a :**

$$\sqrt{a} < U_n < \sqrt{a} + 10^{-p}$$

<u>Solution</u>

1) Par une récurrence triviale, U_n est défini pour tout entier naturel n et $U_n > 0$
Introduisons alors sur $]0; +\infty[$ la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

de dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) = \frac{x^2 - a}{2\,x^2}$$

donc $f'(x) > 0$ sur $]0; \sqrt{a}[$ et $f'(x) < 0$ sur $]\sqrt{a}; +\infty[$

f est donc strictement décroissante sur $]0; \sqrt{a}[$ et strictement croissante sur $]\sqrt{a}; +\infty[$.

De plus sur $]0; +\infty[$:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{a}{x} = 2\,x$$

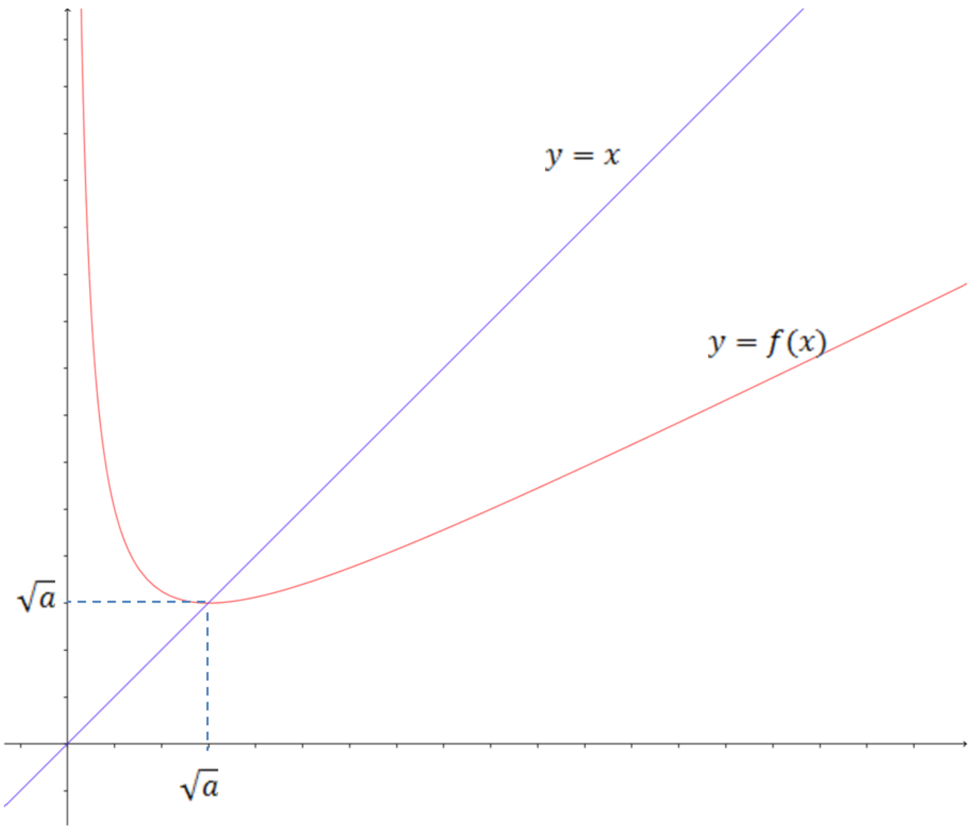
$$\Leftrightarrow \frac{a}{x} = x$$
$$\Leftrightarrow x^2 = a$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{a}$$

De plus :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = 0$$

Donc la droite $y = \frac{1}{2}\,x$ est astymptote oblique à la courbe en $+\infty$

L'allure de sa courbe est alors la suivante :



On a alors pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right) - U_n$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{U_n} - U_n\right) = \frac{a - {U_n}^2}{2\,U_n} = \frac{\left(\sqrt{a} - U_n\right)\left(\sqrt{a} + U_n\right)}{2\,U_n}$$

$U_{n+1} - U_n$ est donc du signe de $\sqrt{a} - U_n$. Or on a :

$$U_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right) - \sqrt{a}$$

$$= \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n} - 2\sqrt{a}\right)$$

$$= \frac{{U_n}^2 - 2\sqrt{a}\,U_n + a}{2\,U_n}$$

$$= \frac{\left(U_n - \sqrt{a}\right)^2}{2\,U_n}$$

Donc pour tout entier naturel n on a, par une récurrence triviale :

$$U_{n+1} - \sqrt{a} > 0$$

Donc à partir du rang 1 :

$$U_n - \sqrt{a} > 0$$

Ainsi :

$$U_{n+1} - U_n < 0$$

La suite est donc strictement décroissante à partir du rang 1 et minorée par $\sqrt{a}$ donc elle converge vers une limite qui est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ c'est-à-dire $\sqrt{a}$

2) On déduit de la relation précédente, à partir du rang 0 :

$$\boxed{0 < U_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{\left(U_n - \sqrt{a}\right)^2}{2\sqrt{a}}}$$

3) On déroule la relation ci-dessus :

$$U_2 - \sqrt{a} < \frac{\left(U_1 - \sqrt{a}\right)^2}{2\sqrt{a}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\ k^2$$

$$U_3 - \sqrt{a} < \frac{\left(U_2 - \sqrt{a}\right)^2}{2\sqrt{a}} < \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{1+2}\ k^{2^2}$$

$$U_4 - \sqrt{a} < \frac{\left(U_3 - \sqrt{a}\right)^2}{2\sqrt{a}} < \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{1+2+2^2}\ k^{2^3}$$

D'où on tire :

$$U_n - \sqrt{a} < \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{1+2+2^2+\cdots 2^{n-2}} \quad k^{2^{n-1}}$$

Soit :

$$U_n - \sqrt{a} < \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}-1} \quad k^{2^{n-1}}$$

Finalement :

$$\boxed{U_n - \sqrt{a} < 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}}$$

En faisant le choix d'une valeur de k telle que $k < 2\sqrt{a}$ la suite majorante tend vers 0

4) Il suffit de déterminer la plus petite valeur de n telle que l'on ait :

$$2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}} < 10^{-p}$$

Soit

$$\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}} < \frac{10^{-p}}{2\sqrt{a}}$$

En prenant le log :

$$2^{n-1}\, Ln\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right) < Ln\left(\frac{10^{-p}}{2\sqrt{a}}\right)$$

$$2^{n-1} > \frac{Ln\left(\frac{10^{-p}}{2\sqrt{a}}\right)}{Ln\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)}$$

$$(n-1)\, Ln(2) > Ln\left(\frac{Ln\left(\frac{10^{-p}}{2\sqrt{a}}\right)}{Ln\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)}\right)$$

On prend le plus petite entier n tel que :

$$n > 1 + \frac{Ln\left(\dfrac{Ln\left(\dfrac{10^{-p}}{2\sqrt{a}}\right)}{Ln\left(\dfrac{k}{2\sqrt{a}}\right)}\right)}{Ln(2)}$$