Equation au produit vectoriel

Enoncé :

$\vec{a}$ et $\vec{b}$ étant deux vecteurs de l'espace donnés, résoudre l'équation en $\vec{u}$:

$$\vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{b}$$

Solution :

Nous nous plaçons dans le cas non trivial $\vec{a} \neq \vec{0}$

1er cas : $\vec{b}$ non orthogonal à $\vec{a}$

Il n'y a alors aucune solution

2ème cas : $\vec{b} = \vec{0}$

$$\vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda\, \vec{a}\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

3ème cas : $\vec{b}$ orthogonal à $\vec{a}$ et $\vec{b} \neq \vec{0}$

Dans ce cas $\vec{u}$ est nécessairement dans le plan orthogonal à $\vec{b}$ donc peut se décomposer sur la base $\left(\vec{a}, \vec{a} \wedge \vec{b}\right)$ de ce dernier. Ainsi :

$$\vec{u} = \lambda\, \vec{a} + \mu\, \vec{a} \wedge \vec{b}$$

Résolvons alors l'équation :

$$\vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \left(\lambda\, \vec{a} + \mu\, \vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{a} = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \lambda\, \vec{a} \wedge \vec{a} + \mu \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{a} = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \mu \left((\vec{a} \cdot \vec{a})\, \vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{a}\right) \vec{a} \right) = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \mu\ \|\vec{a}\|^2\ \vec{b} = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \mu\ \|\vec{a}\|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \mu = \frac{1}{\|\vec{a}\|^2}$$

Les solutions sont donc les vecteurs de la forme :

$$\boxed{\vec{u} = \lambda\, \vec{a} + \frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\, \vec{a} \wedge \vec{b}\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Notons que ces solutions englobent celles du second cas