Calcul de produits vectoriels, en utilisant la méthode la plus rapide

Dans toute la suite $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ désigne une base orthonormée directe de l'espace. Calculer le plus efficacement possible les coordonnées dans cette base des produits vectoriels suivants :

$(\vec{\imath}+2\,\vec{\jmath}) \wedge (\vec{\imath}-2\,\vec{k})$

$(\vec{\imath}+5\,\vec{\jmath}+3\,\vec{k}) \wedge (10\,\vec{\imath}-\vec{\jmath}+7\,\vec{k})$

$\vec{k} \wedge (6\,\vec{\imath}-3\,\vec{\jmath}-2\,\vec{k})$

$(\cos(\alpha)\ \vec{\imath}+\sin(\alpha)\,\vec{\jmath}+\ \vec{k}) \wedge (\cos(\beta)\ \vec{\imath}+\sin(\beta)\,\vec{\jmath}+\ \vec{k})$

<u>Solutions</u> :

Pour la première, il vaut mieux développer en se rappelant que les bases directes s'obtiennent en lisant n'importe quelle suite de 3 vecteurs de la liste :

$$\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k},\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$$

Ainsi :

$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}),(\vec{\jmath},\vec{k},\vec{\imath})$ et $(\vec{k},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont des bases orthonormées directes, ce qui a pour conséquences :

$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$ donc $\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{k}$

$\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$ donc $\vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$

$\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$ donc $\vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath}$

On en déduit :

$(\vec{\imath}+2\,\vec{\jmath}) \wedge (\vec{\imath}-2\,\vec{k}) = \vec{\imath} \wedge \vec{\imath} - 2\,\vec{\imath} \wedge \vec{k} + 2\,\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath} \wedge \vec{k}$

$= \vec{0} + 2\,\vec{\jmath} - 2\,\vec{k} - 4\,\vec{\imath} = -4\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} - 2\,\vec{k}$

Cette façon est plus rapide qu'en utilisant les déterminants

Pour la seconde, en revanche, il vaut mieux utiliser la méthode des déterminants

$$\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}10\\-1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\times 7-3\times(-1)\\-(1\times 7-3\times 10)\\1\times(-1)-5\times 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}38\\23\\-51\end{pmatrix}$$

Pour la troisième, il vaut mieux développer :

$$\vec{k}\wedge\left(6\,\vec{\imath}-3\,\vec{\jmath}-\ 2\,\vec{k}\right)=6\,\vec{k}\wedge\ \vec{\imath}-3\,\vec{k}\wedge\ \vec{\jmath}-2\,\vec{k}\wedge\ \vec{k}=6\,\vec{\jmath}+3\,\vec{\imath}=3\,\vec{\imath}+6\,\vec{\jmath}+0\,\vec{k}$$

La quatrième, ce sera la méthode des déterminants

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\\sin(\alpha)\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\cos(\beta)\\\sin(\beta)\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin(\alpha)-\sin(\beta)\\\cos(\beta)-\cos(\alpha)\\\sin(\beta)\ \cos(\alpha)-\cos(\beta)\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}$$