Double produit vectoriel

Soient trois vecteurs quelconques $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ montrer que l'on a :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\, \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\, \vec{u}$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\, \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\, \vec{w}$$

Preuve :

Commençons par la première.

1er cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

Alors on a, sans nuire à la généralité $\vec{u} = k\, \vec{v}$ et :

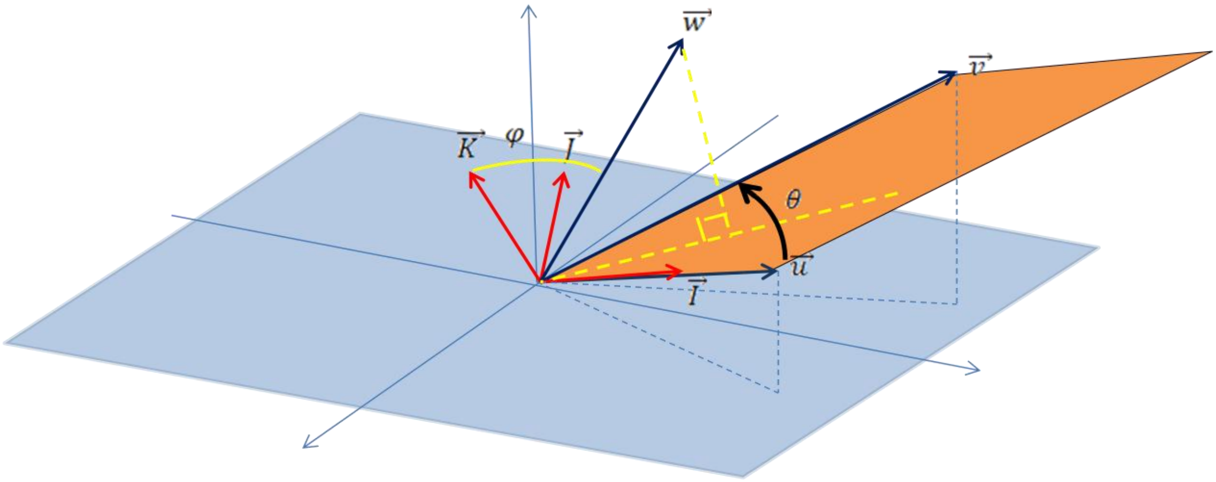
$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{0} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{w})\, \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\, \vec{u} = (k\, \vec{v} \cdot \vec{w})\, \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\, k\, \vec{v} = \vec{0}$$

d'où l'égalité

2ème cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires

On peut alors construire une base orthonormée directe $\vec{I}, \vec{J}; \vec{K}$ telle que $\vec{u}$ soit colinéaire à $\vec{I}$ et de même sens, $\vec{J}$ soit dans le plan engendré par $(\vec{u}, \vec{v})$ et tel que l'orientation de $(\vec{I}, \vec{J})$ soit la même que celle de $(\vec{u}, \vec{v})$, et $\vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J}$



Dans cette base, on a, en notant θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ dans le plan orienté par $(\vec{I}, \vec{J})$

$$\begin{cases} \vec{u} = \|\vec{u}\| \ \vec{I} \\ \vec{v} = \|\vec{v}\| \cos(\theta) \ \vec{I} + \|\vec{v}\| \sin(\theta) \ \vec{J} \\ \vec{w} = X \, \vec{I} + Y \, \vec{J} + Z \, \vec{K} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = X \ \|\vec{u}\|$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = X \ \|\vec{v}\| \cos(\theta) + Y \ \|\vec{v}\| \sin(\theta)$$

et par linéarité à droite du produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \ \vec{I} \wedge \left(\|\vec{v}\| \cos(\theta) \ \vec{I} + \|\vec{v}\| \sin(\theta) \ \vec{J}\right)$$

$$= \|\vec{u}\| \ \vec{I} \wedge \|\vec{v}\| \cos(\theta) \ \vec{I} + \|\vec{u}\| \ \vec{I} \wedge \|\vec{v}\| \sin(\theta) \ \vec{J}$$

$$= \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \cos(\theta) \, \vec{I} \wedge \vec{I} + \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \sin(\theta) \ \vec{I} \wedge \vec{J}$$

$$= \ \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \sin(\theta) \ \vec{K}$$

Encore une fois par linéarité à droite :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \ \vec{w} = \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \sin(\theta) \ \vec{K} \wedge \left(X \, \vec{I} + Y \, \vec{J} + Z \, \vec{K} \ \right)$$

$$= X \ \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \sin(\theta) \ \vec{K} \wedge \vec{I} + Y \ \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \sin(\theta) \ \vec{K} \wedge \vec{J} + \vec{0}$$

$$= X \ \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \sin(\theta) \ \vec{J} - Y \ \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \sin(\theta) \ \vec{I}$$

$$= X \ \|\vec{u}\| \ \left(\vec{v} - \|\vec{v}\| \cos(\theta) \ \vec{I}\right) - Y \ \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \sin(\theta) \ \vec{I}$$

$$= X \ \|\vec{u}\| \ \vec{v} - X \ \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \cos(\theta) \ \vec{I} - Y \ \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \sin(\theta) \ \vec{I}$$

$$= X\ \|\vec{u}\|\ \vec{v} - (X\ \|\vec{v}\| \cos(\theta) + Y\ \|\vec{v}\| \sin(\theta))\ \|\vec{u}\|\ \vec{I}$$

$$= (\vec{u} \cdot \vec{w})\ \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\ \vec{u}$$

Ce qui prouve l'égalité

Voyons maintenant la deuxième formule :

$$\vec{u} \wedge\ (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge\ \vec{u}$$

$$=\ -\big((\vec{v} \cdot \vec{u})\ \vec{w} - (\vec{w} \cdot u)\ \vec{v}\big)$$

$$= (\vec{u} \cdot \vec{w})\ \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\ \vec{w}$$