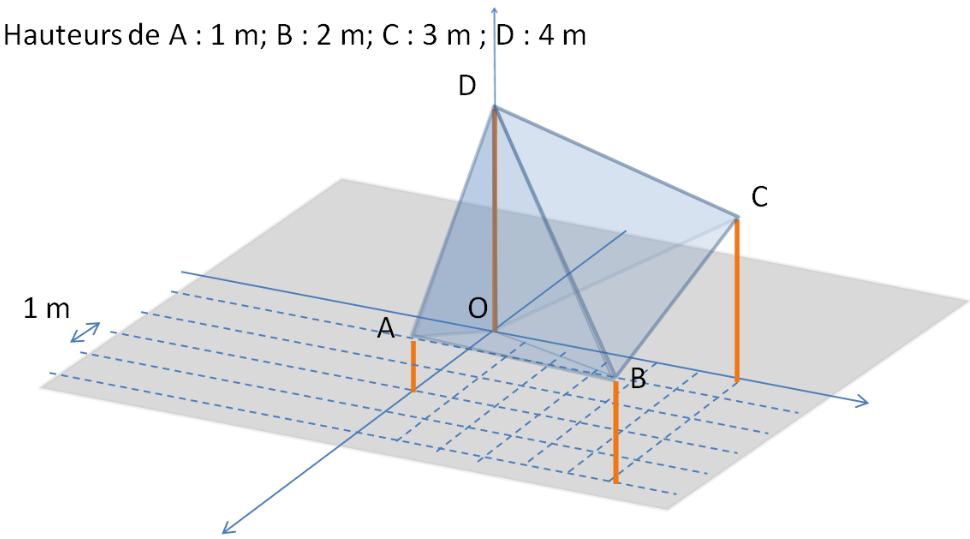
Exercice d'application du produit vectoriel et du déterminant

Un professeur de physique se piquant d'architecture, a réalisé cette maquette d'un édifice présentant six surfaces en verre triangulaires entourant un polyèdre.



Questions :

1) Calculer la surface de verre nécessaire pour réaliser cet édifice

2) Calculer le volume d'air enfermé dans l'édifice

<u>Solution</u>

Les coordonnées des divers points dans un repère orthonormé lié au quadrillage sont :

$$A(3,0,1)\ ;\quad B(5,6,2)\ \ ;\quad C(0,6,3),\qquad D(0,0,4)$$

1) On calcule les aires de chaque triangle :

$$Aire\ de\ A\ B\ D = \frac{1}{2}\ \|\overrightarrow{AB}\ \wedge\ \overrightarrow{AD}\|$$

$$\overrightarrow{AB}\ \wedge\ \overrightarrow{AD}\quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Aire\ de\ A\ B\ D = \frac{1}{2}\times 9\ \times\sqrt{4+1+4} = \frac{9}{2}\sqrt{9} = \frac{27}{2}$$

$$Aire\ de\ B\ C\ D = \frac{1}{2}\ \|\overrightarrow{BC}\ \wedge\ \overrightarrow{BD}\|$$

$$\overrightarrow{BC}\ \wedge\ \overrightarrow{BD}\quad \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 0 & -6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$Aire\ de\ B\ C\ D = \frac{1}{2}\sqrt{36+25+900} = \frac{1}{2}\sqrt{961}$$

$$Aire\ de\ O\ D\ C = \frac{1}{2}\ \|\overrightarrow{OC}\ \wedge\ \overrightarrow{OD}\|$$

$$\overrightarrow{OC}\ \wedge\ \overrightarrow{OD}\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Aire\ de\ O\ D\ C = \frac{1}{2}\times 24 = 12$$

$$Aire\ de\ O\ D\ A = \frac{1}{2}\ \|\overrightarrow{OA}\ \wedge\ \overrightarrow{OD}\|$$

$$\overrightarrow{OA}\ \wedge\ \overrightarrow{OD}\quad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Aire\ de\ O\ D\ A = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

$$Aire\ de\ O\ B\ A = \frac{1}{2}\ \|\overrightarrow{OA}\ \wedge\ \overrightarrow{OB}\|$$

$$\overrightarrow{OA}\ \wedge\ \overrightarrow{OB}\quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$Aire\ de\ O\ B\ A = \frac{1}{2} \times \sqrt{36 + 1 + 324} = \frac{1}{2}\ \sqrt{361}$$

$$Aire\ de\ O\ B\ C = \frac{1}{2}\ \|\overrightarrow{OC}\ \wedge\ \overrightarrow{OB}\|$$

$$\overrightarrow{OC}\ \wedge\ \overrightarrow{OB}\quad \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -30 \end{pmatrix} = 3\ \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$Aire\ de\ O\ B\ C = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{4 + 25 + 100} = \frac{3}{2}\ \sqrt{129}$$

L'aire totale est donc :

$$\frac{27}{2} + \frac{1}{2}\ \sqrt{961} + 12 + 6 + \frac{1}{2}\ \sqrt{361} + \frac{3}{2}\ \sqrt{129} \simeq 73{,}5\ m^2$$

2) On décompose le volume en deux tétraèdres

$$\text{Volume de } O\ A\ B\ D = \frac{1}{6}\ \text{volume du parallélépipède construit sur } O\ A\ B\ D$$

$$= \frac{1}{6}\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \times \left(0\ \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \times 4 \times 18 = 12$$

$$\text{Volume de } O\ B\ C\ D = \frac{1}{6} \text{ volume du parallélépipède construit sur } O\ B\ C\ D$$

$$= \frac{1}{6}\det\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \times \left(0 \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \times 4 \times 30 = 20$$

Le volume total est donc :

$$12 + 20 = 32\ m^3$$