

Enoncé :

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ noté $\mathbb{E}_p$, $\mathbb{F}$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{E}_p$ défini par :

$$\mathbb{F} = \{A X, \quad X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ noté } \mathbb{E}_n\}$$

Pour $X \in \mathbb{E}_p$ on notera $X(i)$ le terme de la i ème ligne de X

$\mathbb{E}_p$ est muni de son produit scalaire canonique φ défini par :

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{E}_p^2 : \varphi(X, Y) = {}^t X Y = \sum_{i=1}^p X(i) Y(i)$$

On se propose de déterminer le minimum sur $\mathbb{E}_n$ de la fonction de $\mathbb{E}_n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(X) = \|A X - B\|$$

ainsi que le ou les valeurs de X en laquelle ou lesquelles il est atteint.

- 1) On considère la fonction de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(Y) = \|Y - B\|^2$$

On note $p_{\mathbb{F}}$ la projection orthogonale dans $\mathbb{E}_p$ sur $\mathbb{F}$ et $Y_0 = p_{\mathbb{F}}(B)$. Montrer que Y_0 est l'unique vecteur de $\mathbb{F}$ en lequel g admet un minimum absolu (On pourra utiliser théorème de Pythagore)

- 2) Justifier l'équivalence :

$$Y_0 = p_{\mathbb{F}}(B) \Leftrightarrow \forall Y \in \mathbb{F} : {}^t Y (Y_0 - B) = 0$$

- 3) En déduire l'équivalence :

$$f \text{ présente sur } \mathbb{E}_n \text{ un minimum en } X_0 \Leftrightarrow g \text{ présente sur } \mathbb{F} \text{ un minimum en } Y_0 = A X_0$$

$$\Leftrightarrow X_0 \text{ solution de : } {}^t A A X_0 = {}^t A B$$

- 4) En déduire que f présente sur $\mathbb{E}_n$ un minimum et déterminer l'ensemble des vecteurs en lesquels le minimum est atteint en précisant une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que cet ensemble soit réduit à un unique vecteur
- 5) Application : Déterminer la valeur du minimum et le ou les vecteurs en lesquels il est atteint dans les trois cas suivants :

1^{er} cas :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2^{ème} cas :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3^{ème} cas :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- 6) Retrouver les résultats du premier cas en étudiant le minimum d'une fonction de deux variables

Correction

1) On a pour tout Y de $\mathbb{F}$

$$\begin{aligned} g(Y) &= \|Y - B\|^2 = \|(Y - Y_0) + (Y_0 - B)\|^2 \\ &= \|Y - Y_0\|^2 + 2 \varphi(Y - Y_0, Y_0 - B) + \|Y_0 - B\|^2 \\ &= \|Y - Y_0\|^2 + \|Y_0 - B\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi pour $Y \neq Y_0$: $g(Y) > \|Y_0 - B\|^2 = g(Y_0)$

g présente donc un minimum qu'elle atteint en un unique vecteur qui est Y_0

2) On a :

$$\begin{aligned} Y_0 = p_{\mathbb{F}}(B) &\Leftrightarrow Y_0 - B \in \mathbb{F}^\perp \\ &\Leftrightarrow \forall Y \in \mathbb{F} : \varphi(Y, Y_0 - B) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall Y \in \mathbb{F} : {}^t Y (Y_0 - B) = 0 \end{aligned}$$

3) On a

f présente sur $\mathbb{E}_n$ un minimum en $X_0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{E}_n : \|A X - B\| \geq \|A X_0 - B\|$

$$\Leftrightarrow \forall Y \in \mathbb{F} : \|Y - B\| \geq \|Y_0 - B\|$$

$$\Leftrightarrow \forall Y \in \mathbb{F} : \|Y - B\|^2 \geq \|Y_0 - B\|^2$$

$$\Leftrightarrow g \text{ présente sur } \mathbb{F} \text{ un minimum en } Y_0$$

$$\Leftrightarrow Y_0 = p_{\mathbb{F}}(B)$$

$$\Leftrightarrow \forall Y \in \mathbb{F} : {}^t Y (Y_0 - B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{E}_n : {}^t (AX) (A X_0 - B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{E}_n : {}^t X {}^t A (A X_0 - B) = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^t A (A X_0 - B) = 0$$

- 4) Nous avons vu en 1) que g présente sur $\mathbb{F}$ un minimum en un unique vecteur qui est $Y_0 = p_{\mathbb{F}}(B)$. Or $p_{\mathbb{F}}(B) \in \mathbb{F}$. Donc : $\exists X_0 \in \mathbb{E}_n : A X_0 = Y_0$. Ceci prouve que f présente sur $\mathbb{E}_n$ un minimum en X_0 .

De plus, l'ensemble des vecteurs en lequel ce minimum est atteint est le sous ensemble de $\mathbb{F}$ défini par :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_1 = \{X \in \mathbb{E}_n : A X = A X_0\} &= \{X \in \mathbb{E}_n : A (X - X_0) = 0\} = \{X \in \mathbb{E}_n : X - X_0 \in \text{Ker}(A)\} \\ &= X_0 + \text{Ker}(A) \end{aligned}$$

Cet ensemble se réduit à un unique vecteur si et seulement si le noyau de A se réduit au vecteur nul.

5) 1^{er} cas :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t A A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$${}^t A B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$${}^t A A X = {}^t A B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \times 13 - 5 \times 5} \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -12 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Donc le minimum est atteint en :

$$X_0 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

et comme le rang de A est 2, son noyau est réduit au vecteur nul donc le minimum est atteint en l'unique vecteur X_0 .

Calculons la valeur du minimum en commençant par :

$$A X_0 - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le minimum est alors :

$$\|A X_0 - B\| = \frac{1}{7} \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{1}{7} \sqrt{14}$$

2^{ème} cas :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$${}^t A A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$${}^t A B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$${}^t A A X = {}^t A B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y + 7z = -1 \\ x + y + z = 1 \\ 7x + y + 10z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y + 7z = -1 \\ -4y + 2z = -6 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y + 7z = -1 \\ -2y + z = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -1 - y - 7z \\ z = 2y - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(-1 - y - 7(2y - 3)) \\ z = 2y - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(20 - 15y) = 4 - 3y \\ z = 2y - 3 \end{cases}$$

Notons alors qu'il existe X tel que $A X = B$. Le minimum est donc 0 et l'ensemble des vecteurs en lesquels il est atteint est :

$$\mathbb{F}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3y + 4 \\ 2y - 3 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

C'est une droite affine.

Remarque : Ayant noté que $A X = B$ possédait au moins une solution, on aurait pu se contenter de résoudre le système associé.

3^{ème} cas :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ici on peut vérifier que le système $A X = B$ n'a pas de solution. Le minimum sera donc strictement positif.

$${}^t A A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}^t A B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t A A X = {}^t A B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y + 2z = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -y - z$$

L'ensemble des vecteurs en lesquels le minimum est atteint est donc :

$$\mathbb{F}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} : (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = Vect \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

C'est donc un plan vectoriel

6) Soit la fonction de deux variables définie par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_2 : f(x, y) = \|A X - B\|^2$$

On a :

$$A X - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - 1 \\ x + 1 \\ x + 3y - 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$f(x, y) = (x + 2y - 1)^2 + (x + 1)^2 + (x + 3y - 1)^2$$

Calculons les dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(x + 2y - 1) + 2(x + 1) + 2(x + 3y - 1) = 3x + 5y - 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4(x + 2y - 1) + 6(x + 3y - 1) = 5x + 13y - 5 \end{cases}$$

On en déduit les points stationnaires en résolvant :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 5x + 13y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-6}{7} \\ y = \frac{5}{7} \end{cases}$$

Si on admet que f possède un minimum global alors il est atteint au point stationnaire et ce minimum vaut

$$f\left(\frac{-6}{7}, \frac{5}{7}\right) = \frac{14}{49} = \frac{2}{7}$$

Nous retrouvons le résultat du 5) premier cas mais il faut encore justifier que f possède un minimum global en se plaçant sur un compact de $\mathbb{R}^2$ pour justifier l'existence d'un minimum global sur ce compact et prouver qu'il est atteint en un point intérieur. Ce problème est plus délicat que le traitement opéré à la question 5) qui sera donc préférable, puisque épargnant ce genre de justification.