<u>Enoncé 1</u>

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

Si $x \geq 0$:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Si $x < 0$

$$f(x) = 0$$

1) **Montrer que f est une densité de probabilité**
2) **Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de même densité f. On note $Y_n = Min(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Déterminer la densité de Y_n**
3) **Pour quelles valeurs de n la variable Y_n admet elle une espérance ? La calculer dans ce cas**

<u>Enoncé 2</u>

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{a}{\pi\,(x^2 + r)}$$

où $r > 0$

1) **Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité**
2) **Soit X aléatoire de densité f. Montrer que X n'a pas d'espérance**
3) **Soit Y la variable aléatoire définie par :**

$$Y = Ln|X|$$

Déterminer une densité de Y et montrer que Y admet une espérance.

Solution énoncé 1

1) On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\ dx = \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^{+\infty} = 1$$

2) Notons f_{Y_n} la densité de Y_n. Alors on a :

Pour $y < 0$:

$$f_{Y_n}(y) = 0$$

Pour $y \geq 0$:

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n < y) = 1 - P(Y_n \geq y)$$

$$= 1 - P\big((X_1 \geq y) \cap (X_2 \geq y) \cap \dots \cap (X_n \geq y)\big)$$

$$= 1 - (1 - F(y))^n$$

Or pour $y \geq 0$:

$$F(y) = \int_0^y \frac{1}{(1+x)^2}\ dx = \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^y = 1 - \frac{1}{1+y}$$

Donc :

$$F_{Y_n}(y) = 1 - \frac{1}{(1+y)^n}$$

$$\boxed{f_{Y_n}(y) = \frac{n}{(1+y)^{n+1}}}$$

3) On a en $+\infty$

$$y\ f_{Y_n}(y) \sim \frac{n\ y}{y^{n+1}} = \frac{n}{y^n}$$

Y_n admet donc une espérance si et seulement si l'intégrale est convergente en $+\infty$ soit $n > 1$. Dans ce cas :

$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} \frac{n\ y}{(1+y)^{n+1}}\ dy = n \int_0^{+\infty} \frac{y+1-1}{(1+y)^{n+1}}\ dy$$

$$= n\left(\int_0^{+\infty} \frac{y+1}{(1+y)^{n+1}}\,dy - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)^{n+1}}\,dy\right)$$

$$= n\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)^{n}}\,dy - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)^{n+1}}\,dy\right)$$

$$= n\left(\left[-\frac{1}{(n-1)\,(1+y)^{n-1}}\right]_0^{+\infty} - \left[-\frac{1}{n\,(1+y)^{n}}\right]_0^{+\infty}\right)$$

$$= n\left(\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}\right)$$

$$\boxed{E(Y_n) = \frac{1}{n-1}}$$

<u>Solution énoncé 2</u>

1) On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\pi\,(x^2+r)}\,dx = \frac{a}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{r}}\,tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{r}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{a}{\pi\,\sqrt{r}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{\sqrt{r}}$$

La condition pour que f soit une densité est donc :

$$a = \sqrt{r}$$

2) On a en $+\infty$:

$$x\,f(x) = \frac{\sqrt{r}\,x}{\pi\,(x^2+r)} \sim \frac{\sqrt{r}}{\pi\,x}$$

L'intégrale est donc divergente en $+\infty$ donc X n'a pas d'espérance.

3) On a pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction de répartition

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(Ln|X| < t)$$

$$= P(|X| < e^t)$$

$$= P(-e^t < X < e^t)$$

$$= F_X(e^t) - F_X(-e^t)$$

Puis la densité :

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = e^t f_X(e^t) + e^t f_X(-e^t)$$

$$= \frac{2\sqrt{r}}{\pi} \frac{e^t}{e^{2t} + r}$$

On a alors en $+\infty$:

$$t\, f_Y(t) = \frac{2\sqrt{r}}{\pi} \frac{t\, e^t}{e^{2t} + r} \sim \frac{2\sqrt{r}}{\pi} \frac{t}{e^t}$$

Et :

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 \frac{t}{e^t} = 0$$

Donc l'intégrale est convergente en $+\infty$ et donc Y admet une espérance